

（復1）次の式を（ ）内の文字について、降べきの順に整理せよ。

(1) $a^2 - 3ab + 2a^2b + a - 1 =$ (a)

(2) $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 5x + 4y - 2 =$ (x)

(3) $a^2c + bc^2 + a^2b + c^3 =$ (次数の最も低い文字)

(1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

(4) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(5) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

（復2）次の式を展開せよ。

(1) $(2x + 3y)^2 =$

(2) $(4a - 7b)^2 =$

(3) $(2x - 1)(3x + 2) =$

(4) $(3a - b)(2a + 3b) =$

(5) $(5x + 2y)(5x - 2y) =$

(6) $(a - 2b + 3c)^2 =$

（復3） $(\bigcirc + \Delta)(\bigcirc - \Delta) = \bigcirc^2 - \Delta^2$ の《展開公式》が使えるように、次の式において $\bigcirc$ と Δ を決めて展開せよ。

(1) $(x + y + z)(x + y - z) =$

(2) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = \{(\quad) + \quad \} \{ (\quad) - \quad \}$

(3) $(x + 2y - z)(x - 2y - z) = \{(\quad) + \quad \} \{ (\quad) - \quad \}$

（復4）(1) $(\bigcirc + 3)(\bigcirc - 5) = \bigcirc^2 - 2\bigcirc - 15$ のような《展開公式》が使えるように $\bigcirc$ を決めて、次の式を展開せよ。

$(x^2 + x + 3)(x^2 + x - 5) =$

(2) 上の (1) と同様の考え方で $\bigcirc$ を決めて展開せよ。
 $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 4) =$

(3) 次の式の _____ を引いた部分を先に計算し、(1)(2) と同様の考え方で展開せよ。
 $(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 4) = \underline{(x - 1)(x + 4)} \underline{(x + 1)(x + 2)}$
 $=$

（復5）次の式を展開せよ。

(1) $(x + 1)^2(x - 1)^2 =$ ヒント： $\{(x+1)(x-1)\}^2$ と同じ。 $\sim$ を先に計算せよ。

(2) $(x^2 + xy + 2y^2)(x^2 - xy + 2y^2) =$ ヒント： $\{(x^2+2y^2)+xy\}\{(x^2+2y^2)-xy\}$ と並びかえて考える。

(3) $(a - b - 2c)(a + b - 2c) =$ ヒント： $\{(a-2c)-b\}\{(a-2c)+b\}$ と並びかえる。

(4) $(2x + 1)(2x - 1)(4x^2 + 1) =$ ヒント： $(2x+1)(2x-1)$ を先に計算する。

(5) $(3 + 2x - x^2)^2 =$ ヒント： $(\bigcirc + \Delta + \square)^2 = \bigcirc^2 + \Delta^2 + \square^2 + 2\bigcirc\Delta + 2\Delta\square + 2\bigcirc\square$

因数分解

(解説1) 因数分解のマニュアル。
(手順1) 共通因数があれば、くくり出す。
(手順2) 因数分解の《公式》が使えるものは、公式で因数分解する。
(手順3) (手順1)や(手順2)が使えないときは、次数の最も低い文字について降べきの順に並べる。
【1】その文字が1次るとき ⇒ 必ずできる！（次々回のプリントで練習）
【2】その文字が2次るとき ⇒ 必ずできる！（次々回のプリントで練習）

今回は(手順1)と(手順2)の練習が中心！

(手順1) 共通因数をくくり出す。
例. $9xy^3 - 6x^2y^2 = 3xy^2 \cdot 3y - 3xy^2 \cdot 2x = 3xy^2(3y - 2x)$

問1. (手順1)の考え方で、次の整式を因数分解せよ。

(1) $6a^2b + 3ab^2 =$

(2) $2x^2y - 6xy^2 + 10xyz =$

(3) $a(x - y) + b(y - x) = a(x - y) - b(\quad) =$

(手順2) 《公式》を使って因数分解する。
 $\bigcirc^2 - \Delta^2 = (\bigcirc + \Delta)(\bigcirc - \Delta)$ (《展開公式》の逆になっているだけ。)

問2. 《公式》 $\bigcirc^2 - \Delta^2 = (\bigcirc + \Delta)(\bigcirc - \Delta)$ を使って因数分解せよ。

(1) $x^2 - y^2 =$ (2) $a^2 - 16b^2 =$

(3) $(x + 1)^2 - y^2 =$

問3. 《公式》 $\bigcirc^2 - \Delta^2 = (\bigcirc + \Delta)(\bigcirc - \Delta)$ を2回使って因数分解せよ。

(1) $x^4 - 1 =$ (2) $a^4 - 81 =$

(3) $x^4 - 16y^4 =$

問4. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - (y - 2)^2 =$

(2) $(x^2 + 1)^2 - 4 =$ (2) (2回公式を使うことに注意！)

(3) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 =$ (3) (公式を使ってからさらに…)

たすき掛けの練習

(解説2) 例1. $6x^2 - 13x - 15$ を因数分解せよ。
【考え方】(ア) x^2 の係数 6 は 1×6 か 2×3 の2通りが考えられる。
(イ) 定数 -15 は $(-1) \times 15$, $1 \times (-15)$, $(-3) \times 5$, $3 \times (-5)$ の4通りが考えられる。
この(ア)(イ)をうまく組み合わせ、次のような「たすき掛け」を作って x の係数が -13 になるようなものを見つける。

たすき掛けの失敗例1
$$\begin{array}{r} 1 \times -1 = -6 \\ 6 \times 15 = 15 \end{array}$$

→ ⑨
-13でないのでダメ

たすき掛けの失敗例2
$$\begin{array}{r} 2 \times -3 = -9 \\ 3 \times 5 = 10 \end{array}$$

→ ①
-13でないのでダメ

たすき掛けの成功例
$$\begin{array}{r} 1 \times -3 = -18 \\ 6 \times 5 = 5 \end{array}$$

→ ⑬
-13でなるので正しい

右上の成功例 $\square$ が正しいので、このことより「たすき掛けとは、この x の係数の計算。」
 $6x^2 - 13x - 15 = (x - 3)(6x + 5)$ と書き表す。

問5. 上の例1. の「たすき掛け」の要領で（他のやり方はダメ！）、次の式を因数分解せよ。書き方は次の例2の要領で書くこと。

例2. $2x^2 - 9x - 5 = \underline{(2x + 1)(x - 5)}$ $\begin{array}{r} 2 \times 1 = 1 \\ 1 \times -5 = -5 \\ \hline -9 \end{array}$ (1) $2x^2 - 3x + 1 =$

(2) $2x^2 + 7x + 3 =$

(3) $2x^2 - 13x + 6 =$

(4) $3x^2 - 14x - 5 =$

(5) $3x^2 - 5x + 2 =$

(6) $2x^2 - 7x + 6 =$

(7) $4x^2 + 8x - 21 =$

（復1）次の式を（ ）内の文字について、降べきの順に整理せよ。

- (1) $a^2 - 3ab + 2a^2b + a - 1 = \underline{(2b+1)a^2 + (-3b+1)a - 1}$ (a)
(2) $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 5x + 4y - 2 = \underline{3x^2 + (-5y+5)x + (-2y^2+4y-2)}$ (x)
 $\underline{3x^2 - 5(y-1)x - 2(y^2 - 2y + 1) \text{でも可}}$
(3) $a^2c + bc^2 + a^2b + c^3$ (次数の最も低い文字)
 $= \underline{(a^2+c^2)b + c(a^2+c^2)}$ $\underline{(a^2+c^2)b + c(a^2+c^2) \text{でも可}}$

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

(4) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(5) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

（復2）次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+3y)^2 = \underline{4x^2 + 12xy + 9y^2}$
(2) $(4a-7b)^2 = \underline{16a^2 - 56ab + 49b^2}$
(3) $(2x-1)(3x+2) = \underline{6x^2 + x - 2}$
(4) $(3a-b)(2a+3b) = \underline{6a^2 + 7ab - 3b^2}$
(5) $(5x+2y)(5x-2y) = \underline{25x^2 - 4y^2}$
(6) $(a-2b+3c)^2 = \underline{a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 4ab - 12bc + 6ac}$ $\underline{ca \text{可}}$

（復3） $\boxed{(O+\Delta)(O-\Delta)=O^2-\Delta^2}$ の《展開公式》が使えるように、次の式において○と△を決めて展開せよ。

- (1) $(\underline{x+y}+z)(\underline{x+y}-z)$
 $= \{(\underline{x+y})+z\}\{(\underline{x+y})-z\}$
 $= (\underline{x+y})^2 - z^2 = \underline{x^2 + y^2 + 2xy - z^2}$ $\underline{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy \text{でも可}}$
(2) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
 $= \{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$
 $= (a^2+b^2)^2 - (ab)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^2b^2 = \underline{a^4 + b^4 + a^2b^2}$
(3) $(x+2y-z)(x-2y-z)$
 $= \{(x-z)+2y\}\{(x-z)-2y\}$
 $= (x-z)^2 - (2y)^2 = \underline{x^2 + z^2 - 2xz - 4y^2}$ $\underline{x^2 - 4y^2 + z^2 - 2zx \text{でも可}}$

（復4）(1) $\boxed{(O+3)(O-5)=O^2-2O-15}$ のような《展開公式》が使えるように○を決めて、次の式を展開せよ。

$\underline{x^2+x+3}(\underline{x^2+x}-5)$
 $= (x^2+x)^2 - 2(x^2+x) - 15$
 $= \underline{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 15 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 15}$

$x^2+x=X \text{ とおくと、}$
 $\boxed{(X+3)(X-5)=X^2-2X-15}$

(2) 上の(1)と同様の考え方で○を決めて展開せよ。

$\underline{x^2+3x+1}(\underline{x^2+3x}-4)$
 $= (x^2+3x)^2 - 3(x^2+3x) - 4$
 $= \underline{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 3x^2 - 9x - 4 = x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 9x - 4}$

$x^2+3x=X \text{ とおくと、}$
 $\boxed{(X+1)(X-4)=X^2-3X-4}$

(3) 次の式の _____ を引いた部分を先に計算し、(1)(2)と同様の考え方で展開せよ。

$(x-1)(x+1)(x+2)(x+4) = \underline{(x-1)(x+4)(x+1)(x+2)}$
 $= \underline{(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)}$
 $= (x^2+3x)^2 - 2(x^2+3x) - 8$
 $= \underline{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x^2 - 6x - 8 = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8}$

$x^2+3x=X \text{ とおくと、}$
 $\boxed{(X-4)(X+2)=X^2-2X-8}$

（復5）次の式を展開せよ。

- (1) $(x+1)^2(x-1)^2$ ヒント： $\{(x+1)(x-1)\}^2$ と同じ。 _____ を先に計算せよ。
 $= \{(x+1)(x-1)\}^2 = (x^2-1)^2 = \underline{x^4 - 2x^2 + 1}$
(2) $(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$ ヒント： $\{(x^2+2y^2)+xy\}\{(x^2+2y^2)-xy\}$ と並びかえて考える。
 $= \{(x^2+2y^2)+xy\}\{(x^2+2y^2)-xy\}$
 $= (x^2+2y^2)^2 - (xy)^2 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - x^2y^2$
 $= \underline{x^4 + 4y^4 + 3x^2y^2}$
(3) $(a-b-2c)(a+b-2c)$ ヒント： $\{(a-2c)-b\}\{(a-2c)+b\}$ と並びかえる。
 $= \{(a-2c)-b\}\{(a-2c)+b\}$
 $= (a-2c)^2 - b^2 = \underline{a^2 + 4c^2 - 4ac - b^2}$ $\underline{a^2 - b^2 + 4c^2 - 4ca \text{でも可}}$
(4) $(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)$ ヒント： $(2x+1)(2x-1)$ を先に計算する。
 $= \{(2x+1)(2x-1)\}(4x^2+1)$
 $= (4x^2-1)(4x^2+1) = (4x^2)^2 - 1^2 = \underline{16x^4 - 1}$
(5) $(3+2x-x^2)^2$ ヒント： $(O+\Delta+\square)^2 = O^2 + \Delta^2 + \square^2 + 2O\Delta + 2\Delta\square + 2O\square$
 $= \underline{9 + 4x^2 + x^4 + 12x - 4x^3 - 6x^2}$
 $= \underline{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9}$

（解説1）因数分解のマニュアル。

（手順1）共通因数があれば、くくり出す。

（手順2）因数分解の《公式》が使えるものは、公式で因数分解する。

（手順3）（手順1）や（手順2）が使えないときは、次数の最も低い文字について降べきの順に並べる。

【1】その文字が1次るとき ⇒ 必ずできる！（次々回のプリントで練習）

【2】その文字が2次るとき ⇒ 必ずできる！（次々回のプリントで練習）

今回は（手順1）と（手順2）の練習が中心！

（手順1）共通因数をくくり出す。

例. $9xy^3 - 6x^2y^2 = \underline{3xy^2} \cdot 3y - \underline{3xy^2} \cdot 2x = \underline{3xy^2}(3y-2x)$

問1.（手順1）の考え方で、次の整式を因数分解せよ。

- (1) $6a^2b + 3ab^2 = \underline{3ab(2a+b)}$
(2) $2x^2y - 6xy^2 + 10xyz = \underline{2xy(x-3y+5z)}$
(3) $a(x-y) + b(y-x) = a(x-y) - b(x-y) = \underline{(x-y)(a-b)}$

（手順2）《公式》を使って因数分解する。

$O^2 - \Delta^2 = (O+\Delta)(O-\Delta)$ (《展開公式》の逆になっているだけ。)

問2.《公式》 $O^2 - \Delta^2 = (O+\Delta)(O-\Delta)$ を使って因数分解せよ。

- (1) $x^2 - y^2 = \underline{(x+y)(x-y)}$ (2) $a^2 - 16b^2 = \underline{(a+4b)(a-4b)}$
(3) $(x+1)^2 - y^2 = \{(x+1)+y\}\{(x+1)-y\} = \underline{(x+y+1)(x-y+1)}$
 $\underline{(x+1+y)(x+1-y) \text{でも可}}$

問3.《公式》 $O^2 - \Delta^2 = (O+\Delta)(O-\Delta)$ を2回使って因数分解せよ。

- (1) $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2+1)(x^2-1) = \underline{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$
(2) $a^4 - 81 = (a^2)^2 - 9^2 = (a^2+9)(a^2-9) = \underline{(a^2+9)(a+3)(a-3)}$
(3) $x^4 - 16y^4 = (x^2)^2 - (4y^2)^2 = (x^2+4y^2)(x^2-4y^2) = \underline{(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)}$

問4. 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 - (y-2)^2 = \{x+(y-2)\}\{x-(y-2)\} = \underline{(x+y-2)(x-y+2)}$
(2) $(x^2+1)^2 - 4 = \{(x^2+1)+2\}\{(x^2+1)-2\} = \underline{(x^2+3)(x^2-1) = (x^2+3)(x+1)(x-1)}$ (2) (2回公式を使うことに注意！)
(3) $(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2 = \{(a^2+b^2)+2ab\}\{(a^2+b^2)-2ab\} = \underline{(a+b)^2(a-b)^2}$ (3) 公式を使ってからさらに…

たすき掛けの練習

（解説2）例1. $6x^2 - 13x - 15$ を因数分解せよ。

【考え方】(ア) x^2 の係数6は 1×6 か 2×3 の2通りが考えられる。

(イ) 定数 -15 は $(-1) \times 15$, $1 \times (-15)$, $(-3) \times 5$, $3 \times (-5)$ の4通りが考えられる。

この(ア)(イ)をうまく組み合わせて、次のような「たすき掛け」を作ってxの係数が -13 になるようなものを見つける。

たすき掛けの失敗例1

$1 \times -1 = -6$

$6 \times 15 = 15$

→ ⑨

$\underline{13 \text{ でないのでダメ}}$

たすき掛けの失敗例2

$2 \times -3 = -9$

$3 \times 10 = 10$

→ ①

$\underline{13 \text{ でないのでダメ}}$

たすき掛けの成功例

$1 \times -3 = -18$

$6 \times 5 = 5$

→ ⑬

$\underline{13 \text{ であるので正しい}}$

右上の成功例 $\square$ が正しいので、このことより $\underline{\text{たすき掛けとは、このxの係数の計算。}}$

$6x^2 - 13x - 15 = (x-3)(6x+5)$ と書き表す。

問5. 上の例1. の「たすき掛け」の要領で（他のやり方はダメ!）、次の式を因数分解せよ。書き方は次の例2の要領で書くこと。

- 例2. $2x^2 - 9x - 5 = \underline{(2x+1)(x-5)}$ $\begin{matrix} 2 \times 1 = 1 \\ 1 \times -5 = -10 \\ \hline -9 \end{matrix}$ (1) $2x^2 - 3x + 1 = \underline{(2x-1)(x-1)}$ $\begin{matrix} 2 \times -1 = -1 \\ 1 \times -1 = -1 \\ \hline -2 \\ -3 \end{matrix}$
(2) $2x^2 + 7x + 3 = \underline{(2x+1)(x+3)}$ $\begin{matrix} 2 \times 1 = 1 \\ 1 \times 3 = 6 \\ \hline 7 \end{matrix}$ (3) $2x^2 - 13x + 6 = \underline{(2x-1)(x-6)}$ $\begin{matrix} 2 \times -1 = -1 \\ 1 \times -6 = -12 \\ \hline -13 \end{matrix}$
(4) $3x^2 - 14x - 5 = \underline{(3x+1)(x-5)}$ $\begin{matrix} 3 \times 1 = 1 \\ 1 \times -5 = -15 \\ \hline -14 \end{matrix}$ (5) $3x^2 - 5x + 2 = \underline{(3x-2)(x-1)}$ $\begin{matrix} 3 \times -2 = -2 \\ 1 \times -1 = -3 \\ \hline -5 \end{matrix}$
(6) $2x^2 - 7x + 6 = \underline{(2x-3)(x-2)}$ $\begin{matrix} 2 \times -3 = -3 \\ 1 \times -2 = -4 \\ \hline -7 \end{matrix}$ (7) $4x^2 + 8x - 21 = \underline{(2x+7)(2x-3)}$ $\begin{matrix} 2 \times 7 = 14 \\ 1 \times -3 = -6 \\ \hline 8 \end{matrix}$

教科書理解 数学Ⅰ－第1章－数と式（1）数と式：因数分解（2）

（復1）次の式を（ ）内の文字について、降べきの順に整理せよ。

(1) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 4x + y - 3$ (x)
 $= \underline{2x^2 + (5y - 4)x + (2y^2 + y - 3)}$
(2) $x^2 + y^2 + yz - xz - 2xy$ (x)
 $= \underline{(-x + y)z + (x^2 + y^2 - 2xy)}$ $\underline{-(x - y)z + (x^2 + y^2 - 2xy)}$ でも可

（復2）次の式を展開せよ。

(1) $(x + 3)(x - 3) = \underline{x^2 - 9}$
(2) $(3a + 2b)(3a - 2b) = \underline{9a^2 - 4b^2}$
(3) $(2x + 5)(3x - 4) = \underline{6x^2 + 7x - 20}$
(4) $(3x + 2y)(2x - 5y) = \underline{6x^2 - 11xy - 10y^2}$
(5) $(a - b + c)^2 = \underline{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac}$
(6) $(x - 2y + 3z)^2 = \underline{x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 12yz + 6xz}$

（復3）次の式を展開せよ。

(1) $(x + y + 1)(x + y - 1)$ (ヒント $x + y = 0$ と考えると $(0 + 1)(0 - 1)$)
 $= \underline{(x + y)^2 - 1 = x^2 + 2xy + y^2 - 1}$
(2) $(x + y + z)(x - y + z)$
 $= \{(x + z) + y\} \{(x + z) - y\}$
 $= \underline{(x + z)^2 - y^2 = x^2 + z^2 + 2xz - y^2}$ $\underline{x^2 - y^2 + z^2 + 2zx}$ でも可
(3) $(x^2 + x + 3)(x^2 + x - 1)$
 $= \underline{(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 3}$ $\underline{x^2 + x = X}$ とおくと、
 $\underline{(X + 3)(X - 1) = X^2 + 2X - 3}$
 $= \underline{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x - 3 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3}$
(4) $(a + 2b)(a - 2b)(a^2 + 4b^2)$
 $= \underline{(a^2 - 4b^2)(a^2 + 4b^2) = (a^2)^2 - (4b^2)^2 = a^4 - 16b^4}$

（復4）次の式を因数分解せよ。

(1) $9a^2b - 6ab^2 = \underline{3ab(3a - 2b)}$
(2) $(x + 3y)z - 2(x + 3y) = \underline{(x + 3y)(z - 2)}$
(3) $a(2x - y) + b(y - 2x)$
 $= a(2x - y) - b(2x - y) = \underline{(2x - y)(a - b)}$
(4) $4a^2 - b^2 = \underline{(2a + b)(2a - b)}$
(5) $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = \underline{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}$ (ヒント (5)(6)は2回やる。)
(6) $(a^2 + 1)^2 - 4 = \{(a^2 + 1) + 2\} \{(a^2 + 1) - 2\} = \underline{(a^2 + 3)(a^2 - 1)}$
 $= \underline{(a^2 + 3)(a + 1)(a - 1)}$

たすき掛けの練習

（解説1）例1. $6x^2 - 13x - 15$ を因数分解せよ。
【考え方】(ア) x^2 の係数 6 は 1×6 か 2×3 の2通りが考えられる。
(イ) 定数 -15 は $(-1) \times 15$, $1 \times (-15)$, $(-3) \times 5$, $3 \times (-5)$ の4通りが考えられる。
この(ア)(イ)をうまく組み合わせて、次のような**たすき掛け**を作って x の係数が -13 になるようなものを見つける。

たすき掛けの失敗例 1	たすき掛けの失敗例 2	たすき掛けの成功例
$\begin{array}{r} 1 \times -1 = -6 \\ 6 \times 15 = 15 \end{array}$ → ⑨ -13 でないのでダメ	$\begin{array}{r} 2 \times -3 = -9 \\ 3 \times 5 = 10 \end{array}$ → ① -13 でないのでダメ	$\begin{array}{r} 1 \times -3 = -18 \\ 6 \times 5 = 5 \end{array}$ → ③ -13 であるので正しい

右上の成功例 $\square$ が正しいので、このことより $6x^2 - 13x - 15 = (x - 3)(6x + 5)$ と書き表す。

たすき掛けとは、この x の係数の計算。

問1. 上の例1. の **たすき掛け** の要領で（他のやり方はダメ!）、次の式を因数分解せよ。書き方は次の例2. の要領で書くこと。

例2. $2x^2 - 9x - 5$
 $= \underline{(2x + 1)(x - 5)}$ $\begin{array}{r} 2 \times 1 = 2 \\ 1 \times -5 = -5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -5 = -10 \\ 1 \times -1 = -1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 = -2 \\ 1 \times -5 = -5 \end{array}$
(1) $3x^2 - 4x + 1$ $\begin{array}{r} 3 \times -1 = -3 \\ 1 \times -1 = -1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -1 = -3 \\ 1 \times -1 = -1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -1 = -3 \\ 1 \times -1 = -1 \end{array}$
(2) $3x^2 + 7x + 2$ $\begin{array}{r} 3 \times 1 = 3 \\ 1 \times 2 = 2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times 2 = 6 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -2 = -6 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$
(3) $3x^2 - 11x + 6$ $\begin{array}{r} 3 \times -2 = -6 \\ 1 \times -3 = -3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -3 = -9 \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -2 = -6 \\ 1 \times -3 = -3 \end{array}$
(4) $2x^2 - 11x + 5$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 = -2 \\ 1 \times -5 = -5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -5 = -10 \\ 1 \times -1 = -1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 = -2 \\ 1 \times -5 = -5 \end{array}$
(5) $4x^2 - 11x + 6$ $\begin{array}{r} 4 \times -3 = -12 \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \times -2 = -8 \\ 1 \times -3 = -3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \times -3 = -12 \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$

（解説2）例3. $8x^2 - 26xy + 15y^2$ を因数分解せよ。
（考え方） x を文字、 y は数字と考えて $8x^2 - 26xy + 15y^2$ を因数分解せよ。
 x について 2次式なので、（解説1）の**たすき掛け**と全く同様に考える。
右の**たすき掛け**より 与式は $8x^2 - 26xy + 15y^2 = (4x - 3y)(2x - 5y)$
 x の係数 $-26y$ と一致している。

$\begin{array}{r} 4 \times -3y = -12y \\ 2 \times -5y = -10y \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \times -5y = -20y \\ 2 \times -3y = -6y \end{array}$

問2. 上の例3. の要領で、次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - 4xy - 5y^2$ $\begin{array}{r} 1 \times -5y = -5y \\ 1 \times y = y \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -5y = -5y \\ 1 \times y = y \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -5y = -5y \\ 1 \times y = y \end{array}$
 $= \underline{(x + y)(x - 5y)}$
(2) $2x^2 - 7xy + 5y^2$ $\begin{array}{r} 2 \times -5y = -10y \\ 1 \times y = y \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -5y = -10y \\ 1 \times y = y \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -5y = -10y \\ 1 \times y = y \end{array}$
 $= \underline{(2x - 5y)(x + y)}$
(3) $3x^2 - 8xy - 3y^2$ $\begin{array}{r} 3 \times -3y = -9y \\ 1 \times y = y \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -3y = -9y \\ 1 \times y = y \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -3y = -9y \\ 1 \times y = y \end{array}$
 $= \underline{(3x + y)(x - 3y)}$
(4) $6a^2 + ab - 2b^2$ $\begin{array}{r} 3 \times 2b = 6b \\ 2 \times -b = -2b \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times 2b = 6b \\ 2 \times -b = -2b \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times 2b = 6b \\ 2 \times -b = -2b \end{array}$
 $= \underline{(3a + 2b)(2a - b)}$

問3. 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 - 7x + 2$ $\begin{array}{r} 3 \times -1 = -3 \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -1 = -3 \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -1 = -3 \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$
 $= \underline{(3x - 1)(x - 2)}$
(2) $2x^2 + 9x + 10$ $\begin{array}{r} 2 \times 5 = 10 \\ 1 \times 2 = 2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times 5 = 10 \\ 1 \times 2 = 2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times 5 = 10 \\ 1 \times 2 = 2 \end{array}$
 $= \underline{(2x + 5)(x + 2)}$
(3) $3x^2 + 5ax - 2a^2$ $\begin{array}{r} 3 \times -a = -3a \\ 1 \times 2a = 2a \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -a = -3a \\ 1 \times 2a = 2a \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \times -a = -3a \\ 1 \times 2a = 2a \end{array}$
 $= \underline{(3x - a)(x + 2a)}$
(4) $6x^2 - 7ax - 3a^2$ $\begin{array}{r} 2 \times -3a = -6a \\ 3 \times a = 3a \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -3a = -6a \\ 3 \times a = 3a \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -3a = -6a \\ 3 \times a = 3a \end{array}$
 $= \underline{(2x - 3a)(3x + a)}$

問4. **たすき掛け** で次の式を因数分解せよ。（ x は文字、 a は数字と考える。）

(1) $x^2 + (a + 1)x + a$ $\begin{array}{r} 1 \times a = a \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times a = a \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times a = a \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$
 $= \underline{(x + a)(x + 1)}$
(2) $ax^2 + (a - 1)x - 1$ $\begin{array}{r} a \times -1 = -a \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} a \times -1 = -a \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} a \times -1 = -a \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$
 $= \underline{(ax - 1)(x + 1)}$
(3) $x^2 + (a - 2)x - 2a$ $\begin{array}{r} 1 \times a = a \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times a = a \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times a = a \\ 1 \times -2 = -2 \end{array}$
 $= \underline{(x + a)(x - 2)}$
(4) $ax^2 + (a^2 + 1)x + a$ $\begin{array}{r} a \times 1 = a \\ 1 \times a = a \end{array}$ $\begin{array}{r} a \times 1 = a \\ 1 \times a = a \end{array}$ $\begin{array}{r} a \times 1 = a \\ 1 \times a = a \end{array}$
 $= \underline{(ax + 1)(x + a)}$

問5. 上の問4. と同様に考えて、**たすき掛け** で次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + (2y + 1)x + y(y + 1)$ $\begin{array}{r} 1 \times y = y \\ 1 \times y + 1 = y + 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times y = y \\ 1 \times y + 1 = y + 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times y = y \\ 1 \times y + 1 = y + 1 \end{array}$
 $= \underline{(x + y)(x + y + 1)}$
(2) $x^2 + (y + 3)x - y(2y + 3)$ $\begin{array}{r} 1 \times -y = -y \\ 1 \times 2y + 3 = 2y + 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -y = -y \\ 1 \times 2y + 3 = 2y + 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -y = -y \\ 1 \times 2y + 3 = 2y + 3 \end{array}$
 $= \underline{(x - y)(x + 2y + 3)}$
(3) $x^2 + (3y + 1)x + (y + 4)(2y - 3)$ $\begin{array}{r} 1 \times y + 4 = y + 4 \\ 1 \times 2y - 3 = 2y - 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times y + 4 = y + 4 \\ 1 \times 2y - 3 = 2y - 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times y + 4 = y + 4 \\ 1 \times 2y - 3 = 2y - 3 \end{array}$
 $= \underline{(x + y + 4)(x + 2y - 3)}$
(4) $x^2 - (y + 4)x - (2y + 1)(y - 3)$ $\begin{array}{r} 1 \times (y - 3) = y - 3 \\ 1 \times -(2y + 1) = -2y - 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times (y - 3) = y - 3 \\ 1 \times -(2y + 1) = -2y - 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times (y - 3) = y - 3 \\ 1 \times -(2y + 1) = -2y - 1 \end{array}$
 $= \underline{(x + (y - 3))(x - (2y + 1))}$

置き換えて **たすき掛け** の練習

問6. 次の式のある部分を○と考えると、2次式 $\square^2 + 4\square - 12$ のような形の式を作り、**たすき掛け** を用いて因数分解せよ。

(1) $(x + y)^2 + 4(x + y) - 12$ $\begin{array}{r} 1 \times -2 = -2 \\ 1 \times 6 = 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -2 = -2 \\ 1 \times 6 = 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -2 = -2 \\ 1 \times 6 = 6 \end{array}$
 $= \underline{\{(x + y) - 2\} \{(x + y) + 6\}}$
 $= \underline{(x + y - 2)(x + y + 6)}$
(2) $(x - y)^2 - 6(x - y) + 5$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -5 = -5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -5 = -5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -5 = -5 \end{array}$
 $= \underline{\{(x - y) - 1\} \{(x - y) - 5\}}$
 $= \underline{(x - y - 1)(x - y - 5)}$
(3) $2(x + 3)^2 - 5(x + 3) + 2$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 = -2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 = -2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 = -2 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}$
 $= \underline{\{2(x + 3) - 1\} \{(x + 3) - 2\}}$
 $= \underline{(2x + 5)(x + 1)}$
(4) $x^4 - 10x^2 + 9$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -9 = -9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -9 = -9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -9 = -9 \end{array}$
 $= \underline{(x^2 - 1)(x^2 - 9)}$
 $= \underline{(x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3)}$
(5) $x^4 - 5x^2 + 4$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -4 = -4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -4 = -4 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1 \times -1 = -1 \\ 1 \times -4 = -4 \end{array}$
 $= \underline{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$
 $= \underline{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)}$
(6) $4a^4 - 13a^2b^2 + 9b^4$ $\begin{array}{r} 4 \times -9 = -36 \\ 1 \times -1 = -1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \times -9 = -36 \\ 1 \times -1 = -1 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4 \times -9 = -36 \\ 1 \times -1 = -1 \end{array}$
 $= \underline{(4a^2 - 9b^2)(a^2 - b^2)}$
 $= \underline{(4a^2 - 9b^2)(a^2 - b^2)}$
 $= \underline{(2a + 3b)(2a - 3b)(a + b)(a - b)}$

教科書理解 数学Ⅰ－第1章－数と式（1）数と式：因数分解（3）

（復1）次の式を（ ）内の文字について、降べきの順に整理せよ。

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 + x - y - 6$ (x)
 =

(2) $a^2 + 4b^2 + 2bc - ca - 4ab$ (次数の最も低い文字)
 =

（復2）次の式を展開せよ。

(1) $(3x - 2)(5x + 3) =$

(2) $(2x + y)(2x - y) =$

(3) $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2) =$

(4) $(x - 2y - 3z)^2 =$

（復3）次の式を因数分解せよ。

(1) $(2x - y)z - 3(2x - y)$
 =

(3) $a^2 - 4b^2$
 =

(2) $a(x - 2y) + b(2y - x)$
 =

(4) $a^4 - 1$
 =

(5) $(x^2 - 1)y - 3(x^2 - 1)$
 =

（復4）**たすき掛け**で次の式を因数分解せよ。書き方は次の例1の要領で書くこと。

例1. $2x^2 - 9x - 5$ $\begin{pmatrix} 2 \times 1 = 1 \\ 1 \times -5 = -5 \\ -9 \end{pmatrix}$ (1) $2x^2 - 7x + 3$
 $= (2x + 1)(x - 5)$ =

(2) $2x^2 + 5x + 3$
 =

(3) $6x^2 - 11x + 4$
 =

(4) $x^2 - 4xy - 5y^2$
 =

(5) $6a^2 + ab - 2b^2$
 =

（準備1）**たすき掛け**で次の式を因数分解せよ。(xは文字，aは数字と考える。)

(1) $x^2 + (a + 1)x + a$
 =

(2) $ax^2 + (a - 2)x - 2$
 =

(3) $x^2 + (a - 3)x - 3a$
 =

(4) $ax^2 + (a^2 - 1)x - a$
 =

（準備2）上の（準備1）と同様に考えて、**たすき掛け**で次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + (2y + 3)x + y(y + 3)$
 =

(2) $x^2 + (3y - 1)x + (y - 4)(2y + 3)$
 =

(3) $x^2 - (y + 1)x - y(2y + 1)$
 =

(4) $x^2 - (2y + 3)x - (3y + 1)(y - 2)$
 =

（準備3）2次式 $x^2 + 3xy + 2y^2 + x - y - 6$ …① を因数分解したい。

(1) ① を x について降べきの順に並べよ。
 ① の式 = $x^2 + ()x +$

(2) 定数項 □ の部分 (y についての式) を因数分解せよ。
 定数項 □ の部分 =

(3) (1)(2)より 与式①は（準備2）の(1)～(4)のような形の式に表せた。このあと①を因数分解せよ。
 与式① = $x^2 + ()x + ()()$
 =

問1. 左下（準備3）の要領で、次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$
 = $x^2 + ()x + ()$ ← x について降べきの順に
 = $x^2 + ()x + ()()$ ← 定数項を因数分解
 = ← （準備2）の要領で因数分解

(2) $x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1$
 = $x^2 + ()x + ()$ ← x について降べきの順に
 = $x^2 + ()x + ()()$ ← 定数項を因数分解
 = ← （準備2）の要領で因数分解

(3) $x^2 - 2ax + a^2 - x + a - 2$
 =

(4) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 2$
 =

(5) $2x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 3y + 2$
 =

問2. **共通因数をくくり出す**やり方で、次の式を因数分解せよ。

(1) $(b + 1)a - (b + 1) =$

(2) $(x^2 - 1)y - (x^2 - 1) =$

(3) $(x^2 - 1)y - x(x^2 - 1) =$

問3. $a^2b + b^2c + b^3 + a^2c$ …① を因数分解したい。

(1) 次数の最も低い文字は c である。この c について①を降べきの順に並べよ。
 ① の式 = $()c +$
 (2) 定数項 □ の部分 (a , b についての式) を因数分解せよ。
 定数項 □ の部分 =
 (3) (1)(2)より①は $()c + ()()$ の形に表せた。**共通因数をくくり出す**やり方で、①を因数分解せよ。
 与式① = $()c + ()()$
 =

着目した文字が1次のときは、問2,3のように共通因数をくくり出せば 因数分解できる。

問4. $x^2 - 2xy + 4x - 2y + 3$ …① を因数分解したい。

(1) yに着目すると1次である y について降べきの順に整理し、上のやり方で①の式を因数分解せよ。
 (2) xに着目すると2次である x について降べきの順に整理し、左下の**たすき掛け**のやり方で①の式を因数分解せよ。

例題1 $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ …① について

(1) ① の式を a について降べきの順に整理せよ。(この式は a, b, c のどの文字についても2次である。)
 ① = $()a^2 - ()a + ()$
 (2) (1)の1次の項と定数項 (b と c の式) の部分を因数分解せよ。
 ① = $()a^2 - ()()a + ()$
 (3) **たすき掛け**で(2)の式を因数分解する前に、 a^2 の係数、aの係数、定数項の3つには、共通して $(b - c)$ があるのでこれを先にくくり出しておくと、
 ① = $()\{a^2 - ()a +$
 (4) **たすき掛け**で(3)の式を因数分解せよ。
 ① =

教科書理解 数学Ⅰ－第1章－数と式 (1) 数と式：因数分解 (3)

(復1) 次の式を () 内の文字について、降べきの順に整理せよ。

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 + x - y - 6$ (x)

$= \underline{x^2 + (3y+1)x + (2y^2 - y - 6)}$

(2) $a^2 + 4b^2 + 2bc - ca - 4ab$ (次数の最も低い文字)

$= \underline{(2b-a)c + (a^2 + 4b^2 - 4ab)}$

(復2) 次の式を展開せよ。

(1) $(3x-2)(5x+3) = \underline{15x^2 - x - 6}$

(2) $(2x+y)(2x-y) = \underline{4x^2 - y^2}$

(3) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2) = \underline{(a^2-b^2)(a^2+b^2) = a^4 - b^4}$

(4) $(x-2y-3z)^2 = \underline{x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 12yz - 6xz}$

(復3) 次の式を因数分解せよ。

(1) $(2x-y)z - 3(2x-y) = \underline{(2x-y)(z-3)}$

(2) $a(x-2y) + b(2y-x) = \underline{a(x-2y) - b(x-2y) = (x-2y)(a-b)}$

(3) $a^2 - 4b^2 = \underline{(a+2b)(a-2b)}$

(4) $a^4 - 1 = \underline{(a^2+1)(a^2-1) = (a^2+1)(a+1)(a-1)}$

(5) $(x^2-1)y - 3(x^2-1) = \underline{(x^2-1)(y-3) = (x+1)(x-1)(y-3)}$

(復4) **たすき掛け** で次の式を因数分解せよ。書き方は次の 例1 の要領で書くこと。

例1. $2x^2 - 9x - 5 = \underline{(2x+1)(x-5)}$ $\begin{array}{r} 2 \times 1 = 1 \\ 1 \times -5 = -5 \\ \hline -9 \end{array}$ (1) $2x^2 - 7x + 3 = \underline{(2x-1)(x-3)}$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 = -1 \\ 1 \times -3 = -3 \\ \hline -7 \end{array}$

(2) $2x^2 + 5x + 3 = \underline{(2x+3)(x+1)}$ $\begin{array}{r} 2 \times 3 = 3 \\ 1 \times 1 = 1 \\ \hline 5 \end{array}$ (3) $6x^2 - 11x + 4 = \underline{(3x-4)(2x-1)}$ $\begin{array}{r} 3 \times -4 = -8 \\ 2 \times -1 = -3 \\ \hline -11 \end{array}$

(4) $x^2 - 4xy - 5y^2 = \underline{(x+y)(x-5y)}$ $\begin{array}{r} 1 \times y = y \\ 1 \times -5y = -5y \\ \hline -4y \end{array}$ (5) $6a^2 + ab - 2b^2 = \underline{(3a+2b)(2a-b)}$ $\begin{array}{r} 3 \times 2b = 4b \\ 2 \times -b = -3b \\ \hline b \end{array}$

(準備1) **たすき掛け** で次の式を因数分解せよ。(x は文字, a は数字と考える。)

(1) $x^2 + (a+1)x + a = \underline{(x+a)(x+1)}$ $\begin{array}{r} 1 \times a = a \\ 1 \times 1 = 1 \\ \hline a+1 \end{array}$ (2) $ax^2 + (a-2)x - 2 = \underline{(ax-2)(x+1)}$ $\begin{array}{r} a \times -2 = -2 \\ 1 \times 1 = 1 \\ \hline a-2 \end{array}$

(3) $x^2 + (a-3)x - 3a = \underline{(x+a)(x-3)}$ $\begin{array}{r} 1 \times a = a \\ 1 \times -3 = -3 \\ \hline a-3 \end{array}$ (4) $ax^2 + (a^2-1)x - a = \underline{(ax-1)(x+a)}$ $\begin{array}{r} a \times -1 = -1 \\ 1 \times a = a^2 \\ \hline a^2-1 \end{array}$

(準備2) 上の(準備1)と同様に考えて、**たすき掛け** で次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + (2y+3)x + y(y+3) = \underline{(x+y)(x+y+3)}$ $\begin{array}{r} 1 \times y = y \\ 1 \times y+3 = y+3 \\ \hline 2y+3 \end{array}$

(2) $x^2 + (3y-1)x + (y-4)(2y+3) = \underline{(x+y-4)(x+2y+3)}$ $\begin{array}{r} 1 \times y-4 = y-4 \\ 1 \times 2y+3 = 2y+3 \\ \hline 3y-1 \end{array}$

(3) $x^2 - (y+1)x - y(2y+1) = \underline{(x+y)(x-2y-1)}$ $\begin{array}{r} 1 \times -y = -y \\ 1 \times -(2y+1) = -2y-1 \\ \hline -y-1 \end{array}$

(4) $x^2 - (2y+3)x - (3y+1)(y-2) = \underline{(x-3y-1)(x+y-2)}$ $\begin{array}{r} 1 \times -(3y+1) = -3y-1 \\ 1 \times (y-2) = y-2 \\ \hline -2y-3 \end{array}$

(準備3) 2次式 $x^2 + 3xy + 2y^2 + x - y - 6 \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

(1) $\textcircled{1}$ を x について降べきの順に並べよ。

$\textcircled{1}$ の式 $= x^2 + (3y+1)x + \underline{(2y^2 - y - 6)}$

(2) 定数項 $\square$ の部分 (y についての式) を因数分解せよ。

定数項 $\square$ の部分 $= 2y^2 - y - 6 = \underline{(2y+3)(y-2)}$

(3) (1)(2)より 与式 $\textcircled{1}$ は(準備2)の(1)~(4)のような形の式に表せた。このあと $\textcircled{1}$ を因数分解せよ。

与式 $\textcircled{1} = x^2 + (3y+1)x + (2y+3)(y-2)$

$= \underline{(x+(2y+3))(x+(y-2))}$

$= \underline{(x+2y+3)(x+y-2)}$

問1. 左下(準備3)の要領で、次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$

$= x^2 + (3y-1)x + (2y^2 - 3y - 2)$ $\leftarrow$ x について降べきの順に

$= x^2 + (3y-1)x + (2y+1)(y-2)$ $\leftarrow$ 定数項を因数分解

$= \underline{(x+2y+1)(x+y-2)}$ $\begin{array}{r} 1 \times 2y+1 = 2y+1 \\ 1 \times y-2 = y-2 \\ \hline 3y-1 \end{array}$ (準備2)の要領で因数分解

(2) $x^2 + 3xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1$

$= x^2 + (3y-2)x + (2y^2 - 3y + 1)$ $\leftarrow$ x について降べきの順に

$= x^2 + (3y-2)x + (2y-1)(y-1)$ $\leftarrow$ 定数項を因数分解

$= \underline{(x+2y-1)(x+y-1)}$ $\begin{array}{r} 1 \times 2y-1 = 2y-1 \\ 1 \times y-1 = y-1 \\ \hline 3y-2 \end{array}$ (準備2)の要領で因数分解

(3) $x^2 - 2ax + a^2 - x + a - 2$

$= x^2 - (2a+1)x + (a^2 + a - 2)$

$= x^2 - (2a+1)x + (a-1)(a+2)$

$= \underline{(x-a+1)(x-a-2)}$ $\begin{array}{r} 1 \times -(a-1) = -a+1 \\ 1 \times -(a+2) = -a-2 \\ \hline -2a-1 \end{array}$

(4) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 2$

$= x^2 + (-2y+1)x + (y^2 - y - 2)$

$= x^2 + (-2y+1)x + (y+1)(y-2)$

$= \underline{(x-y-1)(x-y+2)}$ $\begin{array}{r} 1 \times -(y+1) = -y-1 \\ 1 \times -(y-2) = -y+2 \\ \hline -2y+1 \end{array}$

(5) $2x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 3y + 2$

$= 2x^2 + (-3y-5)x + (y^2 + 3y + 2)$

$= 2x^2 + (-3y-5)x + (y+1)(y+2)$

$= \underline{(2x-y-1)(x-y-2)}$ $\begin{array}{r} 2 \times -(y+1) = -y-1 \\ 1 \times -(y+2) = -y-2 \\ \hline -3y-5 \end{array}$

問2. **共通因数をくくり出す** やり方で、次の式を因数分解せよ。

(1) $(b+1)a - (b+1) = \underline{(b+1)(a-1)}$

(2) $(x^2-1)y - (x^2-1) = \underline{(x^2-1)(y-1) = (x+1)(x-1)(y-1)}$

(3) $(x^2-1)y - x(x^2-1) = \underline{(x^2-1)(y-x) = (x+1)(x-1)(y-x)}$
 $\leftarrow (x-y)(x+1)(x-1) \text{でも可}$

問3. $a^2b + b^2c + b^3 + a^2c \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

(1) 次数の最も低い文字は c である。この c について $\textcircled{1}$ を降べきの順に並べよ。

$\textcircled{1}$ の式 $= (a^2 + b^2)c + \underline{(a^2b + b^3)}$

(2) 定数項 $\square$ の部分 (a, b についての式) を因数分解せよ。

定数項 $\square$ の部分 $= a^2b + b^3 = \underline{b(a^2 + b^2)}$

(3) (1)(2)より $\textcircled{1}$ は () c + () の形に表せた。**共通因数をくくり出す** やり方で、 $\textcircled{1}$ を因数分解せよ。

与式 $\textcircled{1} = (a^2 + b^2)c + (b)(a^2 + b^2)$
 $= \underline{(a^2 + b^2)(c + b) = (a^2 + b^2)(b + c)}$

着目した文字が1次のときは、問2,3のように共通因数をくくり出せば、因数分解できる。

問4. $x^2 - 2xy + 4x - 2y + 3 \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

(1) y に着目すると1次である。y について降べきの順に整理し、上のやり方で $\textcircled{1}$ の式を因数分解せよ。

$(-2x-2)y + (x^2 + 4x + 3) = -2(x+1)y + (x+1)(x+3)$

$= (x+1)\{-2y + (x+3)\} = \underline{(x+1)(x-2y+3)}$

(2) x に着目すると2次である。x について降べきの順に整理し、左下の**たすき掛け**のやり方で $\textcircled{1}$ の式を因数分解せよ。

$x^2 + (-2y+4)x - (2y-3)$
 $= \underline{(x-2y+3)(x+1)}$ $\begin{array}{r} 1 \times -(2y-3) = -2y+3 \\ 1 \times 1 = 1 \\ \hline -2y+4 \end{array}$

例題1 $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \cdots \textcircled{1}$ について

(1) $\textcircled{1}$ の式を a について降べきの順に整理せよ。(この式は a, b, c のどの文字についても2次である。)

$\textcircled{1} = (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + (b^2c - bc^2)$

(2) (1)の1次の項と定数項 (b と c の式)の部分 を因数分解せよ。

$\textcircled{1} = (b-c)a^2 - (b-c)(b+c)a + \underline{bc(b-c)}$

(3) **たすき掛け** で(2)の式を因数分解する前に、 a^2 の係数, aの係数, 定数項の3つには、共通して (b-c)があるのでこれを先にくくり出しておくと、

$\textcircled{1} = (b-c)\{a^2 - (b+c)a + \underline{bc}\}$

(4) **たすき掛け** で(3)の式を因数分解せよ。

$\textcircled{1} = (b-c)\{(a-b)(a-c)\}$

$= \underline{(b-c)(a-b)(a-c)}$

$\leftarrow (a-b)(b-c)(c-a) \text{でも可}$

$\begin{array}{r} 1 \times -b = -b \\ 1 \times -c = -c \\ \hline -b-c \end{array}$

（復1）次の式を展開せよ。

- (1) $(2x - 4y)(3x + 5y) =$
- (2) $(a + 3b)(a - 3b) =$
- (3) $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) =$
- (4) $(2x - 3y - z)^2 =$

（復2）次の式を因数分解せよ。

- (1) $6a^2bc - 9ab^2c =$
- (2) $a(x - 1) + b(1 - x) =$
- (3) $x^2 - 9y^2 =$
- (4) $(x^2 - y^2)z - (x^2 - y^2) =$
- (5) $a^4 - 81 =$

（復3）**たすき掛け** で次の式を因数分解せよ。

- (1) $3x^2 + 11x + 6$ (2) $3x^2 - 17xy - 6y^2$
- = =

- (3) $a^4 - a^2 - 12$ $\left(\begin{array}{l} \text{ヒント} \\ (3) \ a^2=A \text{ とおくと} \\ \text{与式}=A^2-A-12 \\ = \end{array} \right)$
- =

- (4) $(x^2 + 4x)^2 - 8(x^2 + 4x) - 48$ $\left(\begin{array}{l} \text{ヒント} \\ (4) \ x^2+4x=X \text{ とおくと} \\ \text{与式}=X^2-8X-48 \end{array} \right)$
- =

- (5) $x^2 + (2y - 1)x + y(y - 1)$ (6) $x^2 + (-2y + 1)x + (y + 1)(y - 2)$
- = =

（復4） $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

- (1) $\textcircled{1}$ を x について降べきの順に並べよ。
- $\textcircled{1}$ の式 $= x^2 + (\quad)x + \boxed{}$

- (2) 定数項 $\square$ の部分 (y についての式) を因数分解せよ。
- 定数項 $\square$ の部分 $=$

- (3) (1)(2)より 与式 $\textcircled{1}$ は (復3)の (5)(6)のような形の式に表せた。このあと $\textcircled{1}$ を因数分解せよ。
- 与式 $\textcircled{1} = x^2 + (\quad)x + (\quad)(\quad)$
- =

（復5）（復4）の要領で、次の式を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} & x^2 + 3xy + 2y^2 + x - y - 6 \\ &= x^2 + (\quad)x + (\quad) && \longleftarrow x \text{ について降べきの順に} \\ &= x^2 + (\quad)x + (\quad)(\quad) && \longleftarrow \text{定数項を因数分解} \\ &= && \longleftarrow \text{(復4)(3)の要領で因数分解} \end{aligned}$$

着目した文字が2次のときは、(復4,5)のように たすき掛け で因数分解できる。

（復6）次の式を因数分解せよ。 (注: y について降べきの順に並べてもちろん因数分解できる。)

- (1) $x^2 - xy - 2y^2 - 4x - y + 3$
- =

- (2) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 7y - 3$
- =

問1. **共通因数をくくり出す** やり方で、次の式を因数分解せよ。

- (1) $(b + 1)a - (b + 1) =$
- (2) $(x^2 - 1)y - (x^2 - 1) =$

問2. $a^2b - b^2c - b^3 + a^2c \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

- (1) 次数の最も低い文字は c である。この c について $\textcircled{1}$ を降べきの順に並べよ。

$\textcircled{1}$ の式 $= (\quad)c + \boxed{}$

- (2) 定数項 $\square$ の部分 (a, b についての式) を共通因数 b でくくり出せ。
- 定数項 $\square$ の部分 $=$

- (3) (1)(2)より $\textcircled{1}$ は $(\quad)c + (\quad)(\quad)$ の形に表せた。**共通因数をくくり出す** やり方で、 $\textcircled{1}$ を因数分解せよ。

与式 $\textcircled{1} = (\quad)c + (\quad)(\quad)$

=

着目した文字が1次のときは、問1,2のように 共通因数をくくり出せば 因数分解できる。

問3. 次数の最も低い文字が 1 次 のときは、降べきの順に並べたとき、問1 のように 共通因数をくくり出せる。このことを知って、次の式を因数分解せよ。

- (1) $ab - a - b + 1$
- =

(1) ヒント
 a, b どちらの文字でも1次
 a について降べきの順に
並べると $(*)a + (※)$
 $*$ と $※$ に共通因数がある。

- (2) $ab^2 - b^2c - c^2a + bc^2$
- =

(2) ヒント
 a 1次, b 2次, c 2次
 a について降べきの順

問4. $x^2 - 2xy + 4x - 2y + 3 \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

- (1) y に着目すると1次である y について降べきの順に整理し、上のやり方で $\textcircled{1}$ の式を因数分解せよ。

- (2) x に着目すると2次である x について降べきの順に整理し、左下の **たすき掛け** のやり方で $\textcircled{1}$ の式を因数分解せよ。

(解説1) **【因数分解の鉄則】** 次数の最も低い文字に着目し、その文字が
1 次 のときは、降べきの順に並べて 共通因数をくくり出す
2 次 のときは、降べきの順に並べて たすき掛け
3 次 以上のときは、必勝法は決まっていない！（置き換える、公式を利用）

問5. 次の式を因数分解せよ。【次数の最も低い文字に着目せよ！】

- (1) $ab - 3a - b + 3$

- (2) $bc^2 - c^2a - a^2b + ca^2$

- (3) $2a^2b - 3ab + a - 2b - 2$

- (4) $x^2 + 5xy + 6y^2 - 2x - 7y - 3$

————— 根号を含む式の計算 —————

練1 次の式を計算せよ。

- (1) $\sqrt{2}\sqrt{3} =$ (2) $\sqrt{2}\sqrt{5} =$
- (3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$ (4) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} =$

練2 次の数を $\sqrt{a}$ の形にせよ。

- (1) $3\sqrt{2} =$ (2) $4\sqrt{3} =$
- (3) $3\sqrt{3} =$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2} =$

練3 次の数を $k\sqrt{a}$ の形に表せ。

- (1) $\sqrt{8} =$ (2) $\sqrt{12} =$
- (3) $\sqrt{50} =$ (4) $\sqrt{98} =$

練4 次の計算をせよ。

- (1) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3} =$
- (2) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$

(復1) 次の式を展開せよ。

- (1) $(2x - 4y)(3x + 5y) = \underline{6x^2 - 2xy - 20y^2}$
- (2) $(a + 3b)(a - 3b) = \underline{a^2 - 9b^2}$
- (3) $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) = \underline{(x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x^2)^2 - 4^2 = x^4 - 16}$
- (4) $(2x - 3y - z)^2 = \underline{4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 6yz - 4xz}$

(復2) 次の式を因数分解せよ。

- (1) $6a^2bc - 9ab^2c = \underline{3abc(2a - 3b)}$
- (2) $a(x - 1) + b(1 - x) = \underline{a(x - 1) - b(x - 1)} = \underline{(x - 1)(a - b)}$
- (3) $x^2 - 9y^2 = \underline{(x + 3y)(x - 3y)}$
- (4) $(x^2 - y^2)z - (x^2 - y^2) = \underline{(x^2 - y^2)(z - 1)} = \underline{(x + y)(x - y)(z - 1)}$
- (5) $a^4 - 81 = \underline{(a^2 + 9)(a^2 - 9) = (a^2 + 9)(a + 3)(a - 3)}$

(復3) たすき掛け で次の式を因数分解せよ。

- (1) $3x^2 + 11x + 6 = \underline{(3x + 2)(x + 3)}$ $\begin{array}{r} 3 \times 2 = 6 \\ 1 \times 3 = 3 \\ \hline 11 \end{array}$
- (2) $3x^2 - 17xy - 6y^2 = \underline{(3x + y)(x - 6y)}$ $\begin{array}{r} 3 \times y = 3y \\ 1 \times -6y = -6y \\ \hline -17y \end{array}$
- (3) $a^4 - a^2 - 12 = \underline{a^2 = A \text{ とおく}} = \underline{A^2 - A - 12 = (A + 3)(A - 4)} = \underline{(a^2 + 3)(a^2 - 4) = (a^2 + 3)(a + 2)(a - 2)}$ $\begin{array}{l} \text{ヒント} \\ (3) \ a^2 = A \text{ とおく} \\ \text{与式} = A^2 - A - 12 \\ = \end{array}$
- (4) $(x^2 + 4x)^2 - 8(x^2 + 4x) - 48 = \underline{x^2 + 4x = X \text{ とおく}} = \underline{X^2 - 8X - 48 = (X + 4)(X - 12)} = \underline{(x^2 + 4x + 4)(x^2 + 4x - 12) = (x + 2)^2(x + 6)(x - 2)}$ $\begin{array}{l} \text{ヒント} \\ (4) \ x^2 + 4x = X \text{ とおく} \\ \text{与式} = X^2 - 8X - 48 \end{array}$

- (5) $x^2 + (2y - 1)x + y(y - 1) = \underline{(x + y)(x + y - 1)}$ $\begin{array}{r} 1 \times y = y \\ 1 \times y - 1 = y - 1 \\ \hline 2y - 1 \end{array}$
- (6) $x^2 + (-2y + 1)x + (y + 1)(y - 2) = \underline{\{x - (y + 1)\}\{x - (y - 2)\}} = \underline{(x - y - 1)(x - y + 2)}$ $\begin{array}{r} 1 \times -(y + 1) = -y - 1 \\ 1 \times -(y - 2) = -y + 2 \\ \hline -2y + 1 \end{array}$

(復4) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

- (1) $\textcircled{1}$ を x について降べきの順に並べよ。
 $\textcircled{1}$ の式 $= x^2 + (4y - 4)x + \underline{(4y^2 - 8y + 3)}$
- (2) 定数項 $\square$ の部分 (y についての式) を因数分解せよ。
定数項 $\square$ の部分 $= 4y^2 - 8y + 3 = \underline{(2y - 1)(2y - 3)}$ $\begin{array}{r} 2 \times -1 = -2 \\ 2 \times -3 = -6 \\ \hline -8 \end{array}$
- (3) (1)(2)より 与式 $\textcircled{1}$ は (復3)の (5)(6)のような形の式に表せた。このあと $\textcircled{1}$ を因数分解せよ。
与式 $\textcircled{1} = x^2 + (4y - 4)x + (2y - 1)(2y - 3) = \underline{\{x + (2y - 1)\}\{x + (2y - 3)\}} = \underline{(x + 2y - 1)(x + 2y - 3)}$ $\begin{array}{r} 1 \times 2y - 1 = 2y - 1 \\ 1 \times 2y - 3 = 2y - 3 \\ \hline 4y - 4 \end{array}$

(復5) (復4)の要領で、次の式を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} & x^2 + 3xy + 2y^2 + x - y - 6 \\ &= x^2 + (3y + 1)x + (2y^2 - y - 6) \quad \leftarrow x \text{ について降べきの順に} \\ &= x^2 + (3y + 1)x + (2y + 3)(y - 2) \quad \leftarrow \text{定数項を因数分解} \\ &= \underline{(x + 2y + 3)(x + y - 2)} \quad \leftarrow \text{(復4)(3)の要領で因数分解} \end{aligned}$$
$$\begin{array}{r} 1 \times 2y + 3 = 2y + 3 \\ 1 \times y - 2 = y - 2 \\ \hline 3y + 1 \end{array}$$

着目した文字が2次のときは、(復4.5)のように たすき掛け で因数分解できる。

(復6) 次の式を因数分解せよ。

(注: y について降べきの順に並べてもちろん因数分解できる。)

- (1) $x^2 - xy - 2y^2 - 4x - y + 3 = \underline{x^2 - (y + 4)x - (2y^2 + y - 3)} = \underline{x^2 - (y + 4)x - (2y + 3)(y - 1)} = \underline{\{x - (2y + 3)\}\{x + (y - 1)\}} = \underline{(x - 2y - 3)(x + y - 1)}$ $\begin{array}{r} 1 \times -(2y + 3) = -2y - 3 \\ 1 \times (y - 1) = y - 1 \\ \hline -y - 4 \end{array}$
- (2) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + x + 7y - 3 = \underline{2x^2 + (3y + 1)x - (2y^2 - 7y + 3)} = \underline{2x^2 + (3y + 1)x - (2y - 1)(y - 3)} = \underline{\{2x - (y - 3)\}\{x + (2y - 1)\}} = \underline{(2x - y + 3)(x + 2y - 1)}$ $\begin{array}{r} 2 \times -(y - 3) = -y + 3 \\ 1 \times (2y - 1) = 4y - 2 \\ \hline 3y + 1 \end{array}$

問1. 共通因数をくくり出す やり方で、次の式を因数分解せよ。

- (1) $(b + 1)a - (b + 1) = \underline{(b + 1)\{a - 1\} = (b + 1)(a - 1)}$
- (2) $(x^2 - 1)y - (x^2 - 1) = \underline{(x^2 - 1)(y - 1) = (x + 1)(x - 1)(y - 1)}$

問2. $a^2b - b^2c - b^3 + a^2c \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

(1) 次数の最も低い文字は c である。この c について $\textcircled{1}$ を降べきの順に並べよ。

$$\textcircled{1} \text{ の式} = (a^2 - b^2)c + \underline{(a^2b - b^3)}$$

(2) 定数項 $\square$ の部分 (a, b についての式) を共通因数 b でくくり出せ。

$$\text{定数項 } \square \text{ の部分} = a^2b - b^3 = \underline{b(a^2 - b^2)}$$

(3) (1)(2)より $\textcircled{1}$ は $(\quad)c + (\quad)(\quad)$ の形に表せた。共通因数をくくり出す やり方で、 $\textcircled{1}$ を因数分解せよ。

$$\begin{aligned} \text{与式 } \textcircled{1} &= (a^2 - b^2)c + (b)(a^2 - b^2) \\ &= \underline{(a^2 - b^2)\{c + b\} = (a + b)(a - b)(b + c)} \end{aligned}$$

着目した文字が1次のときは、問1.2のように 共通因数をくくり出せば 因数分解できる。

問3. 次数の最も低い文字が 1 次のはときは、降べきの順に並べたとき、問1 のように 共通因数をくくり出せる。このことを知って、次の式を因数分解せよ。

- (1) $ab - a - b + 1 = \underline{(b - 1)a + (-b + 1)} = \underline{(b - 1)a - (b - 1) = (b - 1)(a - 1)}$ $\begin{array}{l} (1) \text{ ヒント} \\ a, b \text{ どちらの文字でも1次} \\ a \text{ について降べきの順に} \\ \text{並べると } (*)a + (**) \\ * \text{ と } ** \text{ に共通因数がある。} \end{array}$ $\begin{array}{l} (a - 1)b - (a - 1) \\ = (a - 1)(b - 1) \text{ としても可} \end{array}$
- (2) $ab^2 - b^2c - c^2a + bc^2 = \underline{(b^2 - c^2)a - (b^2c - bc^2)} = \underline{(b^2 - c^2)a - bc(b - c)} = \underline{(b - c)(b + c)a - bc(b - c)} = \underline{(b - c)\{(b + c)a - bc\} = (b - c)(ab + ac - bc)}$ $\begin{array}{l} (2) \text{ ヒント} \\ a \text{ 1次, } b \text{ 2次, } c \text{ 2次} \\ a \text{ について降べきの順} \end{array}$

問4. $x^2 - 2xy + 4x - 2y + 3 \cdots \textcircled{1}$ を因数分解したい。

- (1) y に着目すると1次である y について降べきの順に整理し、上のやり方で $\textcircled{1}$ の式を因数分解せよ。
 $(-2x - 2)y + (x^2 + 4x + 3) = \underline{-2(x + 1)y + (x + 1)(x + 3)} = \underline{(x + 1)\{-2y + (x + 3)\} = (x + 1)(x - 2y + 3)}$
- (2) x に着目すると2次である x について降べきの順に整理し、左下の たすき掛け のやり方で $\textcircled{1}$ の式を因数分解せよ。
 $x^2 + (-2y + 4)x - (2y - 3) = \underline{\{x - (2y - 3)\}(x + 1)} = \underline{(x - 2y + 3)(x + 1)}$ $\begin{array}{r} 1 \times -(2y - 3) = -2y + 3 \\ 1 \times 1 = 1 \\ \hline -2y + 4 \end{array}$

(解説1) 【因数分解の鉄則】 次数の最も低い文字に着目し、その文字が 1 次のはときは、降べきの順に並べて 共通因数をくくり出す 2 次のはときは、降べきの順に並べて たすき掛け 3 次以上のときは、必勝法は決まっていな！ (置き換える、公式を利用)

問5. 次の式を因数分解せよ。【次数の最も低い文字に着目せよ！】

- (1) $ab - 3a - b + 3 = \underline{(b - 3)a + (-b + 3)} = \underline{(b - 3)a - (b - 3) = (b - 3)(a - 1)}$ $\begin{array}{l} b \text{ に着目すると、} \\ (a - 1)b - 3(a - 1) \\ = (a - 1)(b - 3) \end{array}$
- (2) $bc^2 - c^2a - a^2b + ca^2 = \underline{(c^2 - a^2)b + (-c^2a + ca^2) = (c^2 - a^2)b - (c^2a - ca^2)} = \underline{(c - a)(c + a)b - ca(c - a) = (c - a)\{(c + a)b - ca\}} = \underline{(c - a)(ab + bc - ca)}$
- (3) $2a^2b - 3ab + a - 2b - 2 = \underline{(2a^2 - 3a - 2)b + (a - 2) = (2a + 1)(a - 2)b + (a - 2)} = \underline{(a - 2)\{(2a + 1)b + 1\} = (a - 2)(2ab + b + 1)}$

- (4) $x^2 + 5xy + 6y^2 - 2x - 7y - 3 = \underline{x^2 + (5y - 2)x + (6y^2 - 7y - 3)} = \underline{x^2 + (5y - 2)x + (2y - 3)(3y + 1)} = \underline{(x + 2y - 3)(x + 3y + 1)}$ $\begin{array}{r} 1 \times 2y - 3 = 2y - 3 \\ 1 \times 3y + 1 = 3y + 1 \\ \hline 5y - 2 \end{array}$

根号を含む式の計算

練1 次の式を計算せよ。

- (1) $\sqrt{2}\sqrt{3} = \underline{\sqrt{6}}$
- (2) $\sqrt{2}\sqrt{5} = \underline{\sqrt{10}}$
- (3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
- (4) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = \underline{2}$
- 練2 次の数を $\sqrt{a}$ の形にせよ。

- (1) $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \underline{\sqrt{18}}$
- (2) $4\sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \underline{\sqrt{48}}$
- (3) $3\sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 3} = \underline{\sqrt{27}}$
- (4) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \underline{\sqrt{\frac{3}{4}}}$

練3 次の数を $k\sqrt{a}$ の形に表せ。

- (1) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \underline{2\sqrt{2}}$
- (2) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \underline{2\sqrt{3}}$
- (3) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \underline{5\sqrt{2}}$
- (4) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = \underline{7\sqrt{2}}$

練4 次の計算をせよ。

- (1) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = \underline{-2\sqrt{3}}$
- (2) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \underline{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

展開

（準備1）たとえば、 $(3x+2)(x^2+4x-7)$ を展開するとき、次のように考えて展開すると、ラクに計算できる。

展開のテクニック

$(3x+2)(x^2+4x-7)$ の展開について

《考え方》この式を展開すると3次式であることは明らかである。したがって、 x^3 、 x^2 、 x 、定数項のそれぞれの係数が分かればよい。

- (1) x^3 の係数はいくらか。
- (2) x^2 の係数は 2つの と の和である。いくらか。
- (3) x の係数は 2つの と の和である。いくらか。
- (4) 定数項はいくらか。
- (5) (1)～(4)より、展開した式をかけ。与式=

問1.（準備1）の「展開のテクニック」の考え方で、 a^3, a^2b, ab^2, b^3 の係数を求めることより、次の式を展開せよ。

《展開公式》【A】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
 $=a^3+\text{ }a^2b+\text{ }ab^2+b^3=\text{ }$

《展開公式》【B】 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
 $=a^3+\text{ }a^2b+\text{ }ab^2-b^3=\text{ }$

（解説1）《展開公式》 **暗記せよ！**
【A】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)=O^3+\Delta^3$
【B】 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)=O^3-\Delta^3$

問2. 上の《展開公式》【A】【B】を用いて、次の式を展開せよ。

- (1) $(x+1)(x^2-x+1) \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)$ の形
=
- (2) $(x-2)(x^2+2x+4) \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)$ の形
=
- (3) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2) \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)$ の形
=
- (4) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2) \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)$ の形
=

問3. 上の《展開公式》の【A】または【B】が使えるように、次の()を作って展開せよ。

- (1) $(a+3)(\text{ })=$
- (2) $(b-2)(\text{ })=$
- (3) $(ab+4)(\text{ })=$
- (4) $(3x-y)(\text{ })=$
- (5) $(x+2y)(\text{ })=$
- (6) $(a-3c)(\text{ })=$

問4. 「展開のテクニック」を用いて、次の□の数を求めよ。

(1) $(4x+5)(x^2+2x-3)=4x^3+\text{ }x^2-\text{ }x-15$

(2) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
 $=a^3+\text{ }a^2b+\text{ }ab^2+b^3$

(3) $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$
 $=a^3-\text{ }a^2b+\text{ }ab^2-b^3$

（解説2）上の「展開のテクニック」で求めた(2)と(3)を《展開公式》として、次の形で覚えておくこと！
《展開公式》 $(O+\Delta)^3=O^3+3O^2\Delta+3O\Delta^2+\Delta^3$
《展開公式》 $(O-\Delta)^3=O^3-3O^2\Delta+3O\Delta^2-\Delta^3$

問5. 上の(解説2)の《展開公式》を用いて、次の式を展開せよ。

- (1) $(x+2)^3=$
- (2) $(x-2)^3=$
- (3) $(3x+1)^3=$
- (4) $(x-2y)^3=$
- (5) $(2a+3b)^3=$

因数分解

《展開公式》の逆を考えて《因数分解の公式》を導く。

- ① $O^3+\Delta^3=(O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)$
② $O^3-\Delta^3=(O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)$ } (展開公式の逆になっているだけ。)

問6. 上の《因数分解の公式》①②を用いて因数分解せよ。

- (1) $x^3+1=$
- (2) $a^3-8=$
- (3) $x^3+27y^3=$
- (4) $8a^3-125b^3=$
- (5) $24a^3+81b^3=$ (5) (3でくくってから①を使う。)
- (6) $x^4-8xy^3=$ (6) (xでくくってから②を使う。)

変形

（解説3）【1】「展開公式」 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ を変形すると、
 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ …**変形公式①**

【2】「展開公式」 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
 $=x^3+y^3+3xy(x+y)$ を変形すると、
 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ …**変形公式②**

問7. (解説3)の「変形公式①」, 「変形公式②」を用いて、次の値を求めよ。

$x=\sqrt{2}+1, y=\sqrt{2}-1$ のとき、
 $xy=$

- (1) $x^2+y^2=$
- (2) $x^3+y^3=$

問8. (解説3)の「変形公式①」, 「変形公式②」を用いて、次の値を求めよ。

$x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, y=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ のとき、
 $\frac{x+y}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=$
 $xy=$

- (1) $x^2+y^2=$
- (2) $x^3+y^3=$
- (3) $x^3y+xy^3=$
- (4) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=$
- (5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}=$
- (6) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}=$
- (7) $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=\frac{y^3+x^3}{x^2y^2}=$

問9 (1) ① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ ② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
の x, y を $x=t, y=\frac{1}{t}$ とおいて、次の式を $t+\frac{1}{t}$ で表せ。

- ① $t^2+(\frac{1}{t})^2=$
- ② $t^3+(\frac{1}{t})^3=$

(2) $t+\frac{1}{t}=3$ のとき、次の値を求めよ。

- ① $t^2+\frac{1}{t^2}=$
- ② $t^3+\frac{1}{t^3}=$

問10. $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ のとき、次の値を求めよ。

- (1) $\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=$
- (2) $x+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+ =$
- (3) $x^2+\frac{1}{x^2}=$
- (4) $x^3+\frac{1}{x^3}=$

展開

（準備1）たとえば、 $(3x+2)(x^2+4x-7)$ を展開するとき、次のように考えて展開すると、ラクに計算できる。

展開のテクニック

$(3x+2)(x^2+4x-7)$ の展開について

《考え方》この式を展開すると3次式であることは明らかである。したがって、 x^3 、 x^2 、 x 、定数項のそれぞれの係数が分かればよい。

- (1) x^3 の係数はいくらか。 **3**
- (2) x^2 の係数は 2つの $\square$ と $\square$ の和である。いくらか。 **14**
- (3) x の係数は 2つの $\square$ と $\square$ の和である。いくらか。 **-13**
- (4) 定数項はいくらか。 **-14**
- (5) (1)～(4)より、展開した式をかけ。与式= **$3x^3+14x^2-13x-14$**

問1.（準備1）の「展開のテクニック」の考え方で、 a^3, a^2b, ab^2, b^3 の係数を求めることより、次の式を展開せよ。

《展開公式》【A】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
 $=a^3+\square a^2b+\square ab^2+b^3=\square$ **a^3+b^3**

《展開公式》【B】 $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
 $=a^3+\square a^2b+\square ab^2-b^3=\square$ **a^3-b^3**

（解説1）《展開公式》 **暗記せよ！**

【A】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)=O^3+\Delta^3$

【B】 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)=O^3-\Delta^3$

問2. 上の《展開公式》【A】【B】を用いて、次の式を展開せよ。

- (1) $(x+1)(x^2-x+1) \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)$ の形
 $=\underline{x^3+1}$
- (2) $(x-2)(x^2+2x+4) \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)$ の形
 $=\underline{x^3-2^3=x^3-8}$
- (3) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2) \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)$ の形
 $=\underline{(2x)^3+y^3=8x^3+y^3}$
- (4) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2) \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)$ の形
 $=\underline{(2a)^3-(3b)^3=8a^3-27b^3}$

問3. 上の《展開公式》の【A】または【B】が使えるように、次の()を作って展開せよ。

- (1) $(a+3)(\underline{a^2-3a+9})=a^3+3^3=\underline{a^3+27}$
- (2) $(b-2)(\underline{b^2+2b+4})=b^3-2^3=\underline{b^3-8}$
- (3) $(ab+4)(\underline{a^2b^2-4ab+16})=(ab)^3+4^3=\underline{a^3b^3+64}$
- (4) $(3x-y)(\underline{9x^2+3xy+y^2})=(3x)^3-y^3=\underline{27x^3-y^3}$
- (5) $(x+2y)(\underline{x^2-2xy+4y^2})=x^3+(2y)^3=\underline{x^3+8y^3}$
- (6) $(a-3c)(\underline{a^2+3ac+9c^2})=a^3-(3c)^3=\underline{a^3-27c^3}$

問4. 「展開のテクニック」を用いて、次の□の数を求めよ。

(1) $(4x+5)(x^2+2x-3)=4x^3+\square x^2-\square x-15$

(2) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
 $=a^3+\square a^2b+\square ab^2+b^3$

(3) $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$
 $=a^3-\square a^2b+\square ab^2-b^3$

（解説2）上の「展開のテクニック」で求めた(2)と(3)を《展開公式》として、次の形で覚えておくこと！

《展開公式》 $(O+\Delta)^3=O^3+3O^2\Delta+3O\Delta^2+\Delta^3$

《展開公式》 $(O-\Delta)^3=O^3-3O^2\Delta+3O\Delta^2-\Delta^3$

問5. 上の（解説2）の《展開公式》を用いて、次の式を展開せよ。

- (1) $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=\underline{x^3+6x^2+12x+8}$
- (2) $(x-2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot (-2)+3\cdot x\cdot (-2)^2+(-2)^3=\underline{x^3-6x^2+12x-8}$
- (3) $(3x+1)^3=(3x)^3+3(3x)^2\cdot 1+3(3x)\cdot 1^2+1^3=\underline{27x^3+27x^2+9x+1}$
- (4) $(x-2y)^3=x^3+3x^2(-2y)+3x(-2y)^2+(-2y)^3=\underline{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}$
- (5) $(2a+3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2(3b)+3(2a)(3b)^2+(3b)^3=\underline{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$

因数分解

《展開公式》の逆を考えて《因数分解の公式》を導く。

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} O^3+\Delta^3=(O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2) \\ \textcircled{2} O^3-\Delta^3=(O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2) \end{array} \right\} \text{（展開公式の逆になっているだけ。）}$$

問6. 上の《因数分解の公式》①②を用いて因数分解せよ。

- (1) $x^3+1=\underline{(x+1)(x^2-x+1)}$
- (2) $a^3-8=\underline{(a-2)(a^2+2a+4)}$
- (3) $x^3+27y^3=\underline{(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)}$
- (4) $8a^3-125b^3=\underline{(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)}$
- (5) $24a^3+81b^3=\underline{3(8a^3+27b^3)} \quad \textcircled{5} \text{ (3でくくってから①を使う。)}$
 $=\underline{3(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)}$
- (6) $x^4-8xy^3=\underline{x(x^3-8y^3)} \quad \textcircled{6} \text{ (xでくくってから②を使う。)}$
 $=\underline{x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)}$

変形

（解説3）【1】「展開公式」 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ を変形すると、

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \cdots$ **変形公式①**

【2】「展開公式」 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$=x^3+y^3+3xy(x+y)$ を変形すると、

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \cdots$ **変形公式②**

問7.（解説3）の「変形公式①」, 「変形公式②」を用いて、次の値を求めよ。

$x=\sqrt{2+1}$, $y=\sqrt{2-1}$ のとき、

$x+y=(\sqrt{2+1})+(\sqrt{2-1})=\underline{2\sqrt{2}} \quad xy=(\sqrt{2+1})(\sqrt{2-1})=\underline{1}$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{2})^2-2\times 1=\underline{6}$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(2\sqrt{2})^3-3\times 1\times 2\sqrt{2}=\underline{10\sqrt{2}}$

問8.（解説3）の「変形公式①」, 「変形公式②」を用いて、次の値を求めよ。

$x=\frac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{2+1}}$, $y=\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}}$ のとき、

$\frac{x+y}{xy}=\frac{\frac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{2+1}}+\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}}}{\frac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{2+1}}\cdot\frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}}}=\frac{(\sqrt{2-1})^2+(\sqrt{2+1})^2}{(\sqrt{2+1})(\sqrt{2-1})}=\frac{2+1-2\sqrt{2}+2+1+2\sqrt{2}}{2-1}=\underline{6}$

$xy=\frac{(\sqrt{2-1})}{(\sqrt{2+1})}\cdot\frac{(\sqrt{2+1})}{(\sqrt{2-1})}=\underline{1}$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\times 1=\underline{34}$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6^3-3\times 1\times 6=\underline{198}$

(3) $x^3y+xy^3=\underline{x y (x^2+y^2)} \quad \textcircled{1} \text{より}$
 $=1\times 34=\underline{34}$

(4) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\underline{34^2-2\times 1^2=1156-2=1154}$

(5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}=\frac{6}{1}=\underline{6}$

(6) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}=\frac{34}{1}=\underline{34}$

(7) $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=\frac{y^3+x^3}{x^2y^2}=\frac{198}{1}=\underline{198}$

問9(1) ① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ ② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

の x , y を $x=t$, $y=\frac{1}{t}$ とおいて、次の式を $t+\frac{1}{t}$ で表せ。

① $t^2+(\frac{1}{t})^2=(t+\frac{1}{t})^2-2t\cdot\frac{1}{t}=(t+\frac{1}{t})^2-2$

② $t^3+(\frac{1}{t})^3=(t+\frac{1}{t})^3-3t\cdot\frac{1}{t}(t+\frac{1}{t})=(t+\frac{1}{t})^3-3(t+\frac{1}{t})$

(2) $t+\frac{1}{t}=3$ のとき、次の値を求めよ。

① $t^2+\frac{1}{t^2}=(t+\frac{1}{t})^2-2=3^2-2=\underline{7}$

② $t^3+\frac{1}{t^3}=(t+\frac{1}{t})^3-3(t+\frac{1}{t})=3^3-3\times 3=\underline{18}$

問10. $x=\frac{\sqrt{5+1}}{2}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{\frac{\sqrt{5+1}}{2}}}{\frac{\sqrt{5+1}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5+1}}=\frac{2(\sqrt{5-1})}{(\sqrt{5+1})(\sqrt{5-1})}=\underline{\frac{\sqrt{5-1}}{2}}$

(2) $x+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5+1}}{2}+\frac{\sqrt{5-1}}{2}=\underline{\sqrt{5}}$

(3) $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=(\sqrt{5})^2-2=\underline{3}$

(4) $x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})=(\sqrt{5})^3-3(\sqrt{5})=\underline{2\sqrt{5}}$

展開

（解説1）《展開公式》

暗記せよ！

【A】 $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \iff (○ + △)(○^2 - ○△ + △^2) = ○^3 + △^3$

【B】 $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \iff (○ - △)(○^2 + ○△ + △^2) = ○^3 - △^3$

（復1）上の《展開公式》【A】【B】を用いて、次の式を展開せよ。

(1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) \iff (○ + △)(○^2 - ○△ + △^2)$ の形
＝

(2) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) \iff (○ - △)(○^2 + ○△ + △^2)$ の形
＝

(3) $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2) \iff (○ + △)(○^2 - ○△ + △^2)$ の形
＝

(4) $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2) \iff (○ - △)(○^2 + ○△ + △^2)$ の形
＝

（復2）上の《展開公式》の【A】または【B】が使えるように、次の（ ）
を作って展開せよ。

(1) $(x + 1)(\quad) =$

(2) $(x - 1)(\quad) =$

(3) $(2a + b)(\quad) =$

(4) $(a - 2b)(\quad) =$

(5) $(3a + 2b)(\quad) =$

(6) $(2x - 3y)(\quad) =$

（解説2）展開公式を次の形で覚えておくこと！

《展開公式》 $(○ + △)^3 = ○^3 + 3○^2△ + 3○△^2 + △^3$

《展開公式》 $(○ - △)^3 = ○^3 - 3○^2△ + 3○△^2 - △^3$

（復3）上の（解説2）の《展開公式》を用いて、次の式を展開せよ。

(1) $(x + 3)^3 =$

(2) $(x - 3)^3 =$

(3) $(2x + 1)^3 =$

(4) $(a - 2b)^3 =$

(5) $(3a + 2b)^3 =$

〈展開の応用問題〉

問1．次の式を展開せよ。

(1) $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a^3 + 1)$ ヒント： $(a - 1)(a^2 + a + 1)$ を先に計算する。
＝

(2) $(a + 1)(a^2 - a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)$ ヒント： $(a + 1)(a^2 - a + 1)$, $(a - 1)(a^2 + a + 1)$
＝ を先に計算する。

(3) $(x + y)(x - y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ ヒント： $(x + y)(x - y)$ を先に計算して、 x^2 を0
＝ y^2 を△とすると $(○ - △)(○^2 + ○△ + △^2)$

(4) $(x - 1)^3(x^2 + x + 1)^3$ ヒント： $\{(x - 1)(x^2 + x + 1)\}^3$ として…
＝

問2．次の式を展開せよ。

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
＝

（解説3）《展開公式》

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

問3．（解説3）の《展開公式》を用いて、次の式を展開せよ。

$(x + y + 1)(x^2 + y^2 - xy - x - y + 1)$
＝

因数分解

《展開公式》の逆を考えて因数分解の公式を導く。

$$\left. \begin{array}{l} \text{① } ○^3 + △^3 = (○ + △)(○^2 - ○△ + △^2) \\ \text{② } ○^3 - △^3 = (○ - △)(○^2 + ○△ + △^2) \end{array} \right\} \text{（展開公式の逆になっているだけ。）}$$

（復4）上の《公式》①②を使って因数分解せよ。

(1) $x^3 + 8 =$

(2) $a^3 - 1 =$

(3) $x^3 + 8y^3 =$

(4) $27a^3 - 64b^3 =$

(5) $32x^3 + 108y^3 =$ (5) (4でくくってから①を使う。)

(6) $a^4 - 27ab^3 =$ (6) (aでくくってから②を使う。)

〈因数分解の応用問題〉

問4．次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3y - x^3 + y - 1 = (x^3 + 1)y - (x^3 + 1)$
＝

(2) $a^3c - a^3 - b^3c + b^3 =$

(3) $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2$
＝

(4) $a^6 - b^6 =$

（解説4）《因数分解の公式》

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

問5．（解説4）の《因数分解の公式》を用いて、次の式を因数分解せよ。

$x^3 + 8y^3 - z^3 + 6xyz$
＝

変形

（解説5） $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ …

変形公式①

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ …

変形公式②

（復5） $x = \frac{3}{2 + \sqrt{3}}$ ， $y = \frac{3}{2 - \sqrt{3}}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x + y =$

(2) $xy =$

(3) $x^2 + y^2 =$

(4) $x^3 + y^3 =$

(5) $x^4y + xy^4 =$

(6) $\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} =$

〈変形の応用問題〉

（解説6）次の関係式は変形の公式として、覚えておくこと。

① $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

② $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$

問6． $x + y + z = 3$ …①， $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ …②， $xyz = 4$ …③ のとき、
次の値を求めよ。

(1) $xy + yz + xz$ $\left(\begin{array}{l} \text{ヒント} \\ x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\ \text{に①②を代入} \end{array} \right)$

(2) $x^3 + y^3 + z^3$

展開

(解説1)《展開公式》

暗記せよ!

【A】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)=O^3+\Delta^3$

【B】 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)=O^3-\Delta^3$

(復1)上の《展開公式》【A】【B】を用いて、次の式を展開せよ。

(1) $(a+2)(a^2-2a+4) \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)$ の形

$=a^3+8$

(2) $(x-3)(x^2+3x+9) \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)$ の形

$=x^3-3^3=x^3-27$

(3) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2) \iff (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)$ の形

$=(2a)^3+b^3=8a^3+b^3$

(4) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2) \iff (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)$ の形

$=(3x)^3-(2y)^3=27x^3-8y^3$

(復2)上の《展開公式》の【A】または【B】が使えるように、次の()
を作って展開せよ。

(1) $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1^3=x^3+1$

(2) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1^3=x^3-1$

(3) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)=(2a)^3+b^3=8a^3+b^3$

(4) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)=a^3-(2b)^3=a^3-8b^3$

(5) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)=(3a)^3+(2b)^3=27a^3+8b^3$

(6) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)=(2x)^3-(3y)^3=8x^3-27y^3$

(解説2)展開公式を次の形で覚えておくこと!

《展開公式》 $(O+\Delta)^3=O^3+3O^2\Delta+3O\Delta^2+\Delta^3$

《展開公式》 $(O-\Delta)^3=O^3-3O^2\Delta+3O\Delta^2-\Delta^3$

(復3)上の(解説2)の《展開公式》を用いて、次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3=x^3+9x^2+27x+27$

(2) $(x-3)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot (-3)+3\cdot x\cdot (-3)^2+(-3)^3=x^3-9x^2+27x-27$

(3) $(2x+1)^3=(2x)^3+3(2x)^2\cdot 1+3(2x)\cdot 1^2+1^3=8x^3+12x^2+6x+1$

(4) $(a-2b)^3=a^3+3a^2(-2b)+3a(-2b)^2+(-2b)^3=a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$

(5) $(3a+2b)^3=(3a)^3+3(3a)^2(2b)+3(3a)(2b)^2+(2b)^3=27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$

展開の応用問題

問1. 次の式を展開せよ。

(1) $(a-1)(a^2+a+1)(a^3+1)$ ヒント: $(a-1)(a^2+a+1)$ を先に計算する。

$=\{(a-1)(a^2+a+1)\}(a^3+1)$

$=(a^3-1)(a^3+1)=(a^3)^2-1^2=a^6-1$

(2) $(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)$

$=\{(a+1)(a^2-a+1)\}\{(a-1)(a^2+a+1)\}$

$=(a^3+1)(a^3-1)=(a^3)^2-1^2=a^6-1$

(3) $(x+y)(x-y)(x^4+x^2y^2+y^4)$ ヒント: $(x+y)(x-y)$ を先に計算して、 x^2 を0

$=\{(x+y)(x-y)\}(x^4+x^2y^2+y^4)$

$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)=(x^2)^3-(y^2)^3=x^6-y^6$

(4) $(x-1)^3(x^2+x+1)^3$ ヒント: $\{(x-1)(x^2+x+1)\}^3$ として…

$=\{(x-1)(x^2+x+1)\}^3$

$=(x^3-1)^3=(x^3)^3+3\cdot(x^3)^2\cdot(-1)+3\cdot x^3\cdot(-1)^2+(-1)^3$

$=x^9-3x^6+3x^3-1$

問2. 次の式を展開せよ。

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-ab^2c-a^2c+a^2b+b^3+b^2c-a^2b^2$

$-b^2c-ab^2c+a^2c+b^2c+c^3-ab^2c-b^2c^2-a^2c^2$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

(解説3)《展開公式》

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

問3.(解説3)の《展開公式》を用いて、次の式を展開せよ。

$(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$

$=(x+y+1)(x^2+y^2+1^2-xy-y-x)$

$=x^3+y^3+1-3xy (=x^3+y^3-3xy+1)$

因数分解

《展開公式》の逆を考えて因数分解の公式を導く。

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} O^3+\Delta^3=(O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2) \\ \textcircled{2} O^3-\Delta^3=(O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2) \end{array} \right\} \text{(展開公式の逆になっているだけ。)}$$

(復4)上の《公式》①②を使って因数分解せよ。

(1) $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

(2) $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

(3) $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

(4) $27a^3-64b^3=(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

(5) $32x^3+108y^3=4(8x^3+27y^3)$ (4でくっってから①を使う。)

$=4(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

(6) $a^4-27ab^3=a(a^3-27b^3)$ (6でくっってから②を使う。)

$=a(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$

因数分解の応用問題

問4. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3y-x^3+y-1=(x^3+1)y-(x^3+1)$

$=(x^3+1)(y-1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(y-1)$

(2) $a^3c-a^3-b^3c+b^3=(a^3-b^3)c-(a^3-b^3)$

$=(a^3-b^3)(c-1)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(c-1)$

(3) $x^6-1=(x^3)^2-1^2$

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

(4) $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(解説4)《因数分解の公式》

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

問5.(解説4)の《因数分解の公式》を用いて、次の式を因数分解せよ。

$x^3+8y^3-z^3+6xyz$

$=x^3+(2y)^3+(-z)^3-3x(2y)(-z)$

$=(x+2y-z)(x^2+4y^2+z^2-2xy+2yz+zx)$

変形

(解説5) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ … **変形公式①**

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ … **変形公式②**

(復5) $x=\frac{3}{2+\sqrt{3}}$, $y=\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x+y=\frac{3}{2+\sqrt{3}}+\frac{3}{2-\sqrt{3}}=\frac{3\times(2-\sqrt{3})+3\times(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{12}{4-3}=12$

(2) $xy=\frac{3}{2+\sqrt{3}}\times\frac{3}{2-\sqrt{3}}=\frac{3\times3}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{9}{4-3}=9$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(12)^2-2\times9=144-18=126$

(4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=12^3-3\times9\times12=1728-324=1404$

(5) $x^4y+xy^4=xy(x^3+y^3)=xy\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}$

$=9\times1404=12636$

(6) $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=\frac{y^3+x^3}{x^2y^2}=\frac{1404}{81}=\frac{52}{3}$

変形の応用問題

(解説6)次の関係式は変形の公式として、覚えておくこと。

① $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

② $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

問6. $x+y+z=3$ …①, $x^2+y^2+z^2=5$ …②, $xyz=4$ …③ のとき、
次の値を求めよ。

(1) $xy+yz+zx$

$x^2+y^2+z^2$

$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

この式の両辺に①, ②の値を代入して、

$5=9-2(xy+yz+zx) \quad xy+yz+zx=2$ …④

(2) $x^3+y^3+z^3$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

この式より

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

この式に①, ②, ③, ④を代入して、

$x^3+y^3+z^3=3(5-2)+3\times4=21$

展開

（解説1）《展開公式》

暗記せよ！

【A】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \Leftrightarrow (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)=O^3+\Delta^3$

【B】 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \Leftrightarrow (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)=O^3-\Delta^3$

- （復1）次の式を展開せよ。
- (1) $(x+4)(x^2-4x+16)=$
- (2) $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)=$
- （復2）上の《展開公式》の【A】または【B】が使えるように、次の（ ）を作って展開せよ。
- (1) $(a+2)(\quad)=$
- (2) $(x-3)(\quad)=$
- (3) $(2a+3b)(\quad)=$
- (4) $(4x-3y)(\quad)=$

展開

（解説2）展開公式を次の形で覚えておくこと！

《展開公式》 $(O+\Delta)^3=O^3+3O^2\Delta+3O\Delta^2+\Delta^3$

《展開公式》 $(O-\Delta)^3=O^3-3O^2\Delta+3O\Delta^2-\Delta^3$

- （復3）次の式を展開せよ。
- (1) $(5x+4)^3=$
- (2) $(2a-3b)^3=$
- (3) $(4xy+3z)^3=$

展開の応用問題

- 問1. 次の式を展開せよ。
- (1) $(x+2)(x^2-2x+4)(x^3-8)=$
- (2) $(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)=$
- (3) $(x+2)(x-2)(x^4+4x^2+16)=$
- (4) $(a-2)^3(a^2+2a+4)^3=$

- 問2. 次の式を展開せよ。
- $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$

因数分解

（解説3）《展開公式》

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

- 問3. (解説3)の《展開公式》を用いて、次の式を展開せよ。
- $(x+2y-1)(x^2+4y^2-2xy+x+2y+1)=$

因数分解

《展開公式》の逆を考えて因数分解の公式を導く。

$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} O^3+\Delta^3=(O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2) \\ \textcircled{2} O^3-\Delta^3=(O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2) \end{array} \right\}$

(展開公式の逆になっているだけ。)

（復4）次の式を因数分解せよ。

(1) $8a^3+27=$

(2) $64a^3-27b^3=$

(3) $135x^3+40y^3=$

(4) $a^5bc-27a^2bc^4=$

因数分解の応用問題

- 問4. 次の式を因数分解せよ。
- (1) $a^3c-a^3+b^3c-b^3=$
- (2) $x^6-64=$

因数分解の公式

（解説4）《因数分解の公式》

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

- 問5. (解説4)の《因数分解の公式》を用いて、次の式を因数分解せよ。
- $x^3-8y^3+27z^3+18xyz=$

変形

（解説5）

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ … **変形公式①**

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ … **変形公式②**

- （復5） $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ， $y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ のとき、次の値を求めよ。
- $x+y=$
- $xy=$
- (1) $x^2+y^2=$
- (2) $x^3+y^3=$
- (3) $x^4+y^4=$
- (4) $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2=$

- (5) $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=$
- （復6）(1) ① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ ② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ の x ， y を $x=t$ ， $y=\frac{1}{t}$ において、次の式を $t+\frac{1}{t}$ で表せ。

- ① $t^2+(\frac{1}{t})^2=$
- ② $t^3+(\frac{1}{t})^3=$
- (2) $t+\frac{1}{t}=-3$ のとき、次の値を求めよ。
- ① $t^2+\frac{1}{t^2}=$
- ② $t^3+\frac{1}{t^3}=$

変形の応用問題

（解説6）次の関係式は変形の公式として、覚えておくこと。

① $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

② $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

- 問6. $x+y+z=2$ …①， $x^2+y^2+z^2=8$ …②， $xyz=5$ …③ のとき、次の値を求めよ。

(1) $xy+yz+zx$

ヒント

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

に①②を代入

(2) $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$

ヒント

$X^2+Y^2+Z^2=(X+Y+Z)^2-2(XY+YZ+ZX)$

において、 $X=xy$, $Y=yz$, $Z=zx$ と考える。

- 問7. 3つの実数 x ， y ， z が $x+y+z=6$ …①， $x^2+y^2+z^2=14$ …② $x^3+y^3+z^3=36$ …③ を満たす。このとき、 xyz の値を求めよ。

展開

（解説1）《展開公式》

暗記せよ！

【A】 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \Leftrightarrow (O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2)=O^3+\Delta^3$

【B】 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \Leftrightarrow (O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2)=O^3-\Delta^3$

（復1）次の式を展開せよ。

(1) $(x+4)(x^2-4x+16)=\underline{x^3+64}$

(2) $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)=\underline{27a^3-64b^3}$

（復2）上の《展開公式》の【A】または【B】が使えるように、次の（ ）を作って展開せよ。

(1) $(a+2)(\underline{a^2-2a+4})=\underline{a^3+8}$

(2) $(x-3)(\underline{x^2+3x+9})=\underline{x^3-27}$

(3) $(2a+3b)(\underline{4a^2-6ab+9b^2})=\underline{8a^3+27b^3}$

(4) $(4x-3y)(\underline{16x^2+12xy+9y^2})=\underline{64x^3-27y^3}$

（解説2）展開公式を次の形で覚えておくこと！

《展開公式》 $(O+\Delta)^3=O^3+3O^2\Delta+3O\Delta^2+\Delta^3$

《展開公式》 $(O-\Delta)^3=O^3-3O^2\Delta+3O\Delta^2-\Delta^3$

（復3）次の式を展開せよ。

(1) $(5x+4)^3=\underline{125x^3+300x^2+240x+64}$

(2) $(2a-3b)^3=\underline{8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3}$

(3) $(4xy+3z)^3=\underline{64x^3y^3+144x^2y^2z+108xyz^2+27z^3}$

展開の応用問題

問1. 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)(x^3-8)$
 $=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}(x^3-8)$
 $=\underline{(x^3+8)(x^3-8)=(x^3)^2-8^2=x^6-64}$

(2) $(x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$
 $=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}\{(x-2)(x^2+2x+4)\}$
 $=\underline{(x^3+8)(x^3-8)=(x^3)^2-8^2=x^6-64}$

(3) $(x+2)(x-2)(x^4+4x^2+16)$
 $=\{(x+2)(x-2)\}(x^4+4x^2+16)$
 $=\underline{(x^2-4)(x^4+4x^2+16)=(x^2)^3-(4)^3=x^6-64}$

(4) $(a-2)^3(a^2+2a+4)^3$
 $=\{(a-2)(a^2+2a+4)\}^3$
 $=\underline{(a^3-8)^3=(a^3)^3+3\cdot(a^3)^2\cdot(-8)+3\cdot a^3\cdot(-8)^2+(-8)^3}$
 $=\underline{a^9-24a^6+192a^3-512}$

問2. 次の式を展開せよ。

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
 $=\underline{a^3+ab^2+ac^2-a^2b-ab^2c-a^2c+ab^2+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-ab^2c+ac^2+abc+c^3-abc-bc^2-ac^2}$
 $=\underline{a^3+b^3+c^3-3abc}$

（解説3）《展開公式》

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

問3.（解説3）の《展開公式》を用いて、次の式を展開せよ。

$(x+2y-1)(x^2+4y^2-2xy+x+2y+1)$
 $=\underline{(x+2y-1)\{x^2+(2y)^2+(-1)^2-x(2y)-(2y)(-1)-x(-1)\}}$
 $=\underline{x^3+(2y)^3+(-1)^3-3x(2y)(-1)}$
 $=\underline{x^3+8y^3+6xy-1}$

因数分解

《展開公式》の逆を考えて因数分解の公式を導く。

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} O^3+\Delta^3=(O+\Delta)(O^2-O\Delta+\Delta^2) \\ \textcircled{2} O^3-\Delta^3=(O-\Delta)(O^2+O\Delta+\Delta^2) \end{array} \right\} \text{（展開公式の逆になっているだけ。）}$$

（復4）次の式を因数分解せよ。

(1) $8a^3+27=\underline{(2a+3)(4a^2-6a+9)}$

(2) $64a^3-27b^3=\underline{(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)}$

(3) $135x^3+40y^3=\underline{5(27x^3+8y^3)}$
 $=\underline{5(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)}$

(4) $a^5bc-27a^2b^2c^4=\underline{a^2bc(a^3-27c^3)}$
 $=\underline{a^2bc(a-3c)(a^2+3ac+9c^2)}$

因数分解の応用問題

問4. 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3c-a^3+b^3c-b^3=(\underline{a^3+b^3})c-(\underline{a^3+b^3})$
 $=\underline{(a^3+b^3)(c-1)}$
 $=\underline{(a+b)(a^2-ab+b^2)(c-1)}$

(2) $x^6-64=(x^3)^2-8^2$
 $=\underline{(x^3+8)(x^3-8)}$
 $=\underline{(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)}$

（解説4）《因数分解の公式》

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

問5.（解説4）の《因数分解の公式》を用いて、次の式を因数分解せよ。

$x^3-8y^3+27z^3+18xyz$
 $=\underline{x^3+(-2y)^3+(3z)^3-3x(-2y)(3z)}$
 $=\underline{(x-2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-3zx)}$

変形

（解説5） $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ … **変形公式①**

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ … **変形公式②**

（復5） $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ， $y=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ のとき、次の値を求めよ。

$x+y=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}}{3-1}=\underline{4}$

$xy=\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)}=\underline{1}$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\times1=\underline{14}$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\times1\times4=\underline{52}$

(3) $x^4+y^4=\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{\textcircled{1}より14}=14^2-2\times1^2=\underline{194}$

(4) $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$
 $=\underline{(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)}$
 $=\underline{14\times52-1^2\times4=724}$

(5) $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=\frac{y^3+x^3}{x^2y^2}=\frac{52}{1}=\underline{52}$

（復6）(1) ① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ ② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
の x ， y を $x=t$ ， $y=\frac{1}{t}$ とおいて、次の式を $t+\frac{1}{t}$ で表せ。

① $t^2+(\frac{1}{t})^2=(t+\frac{1}{t})^2-2t\cdot\frac{1}{t}=\underline{(t+\frac{1}{t})^2-2}$

② $t^3+(\frac{1}{t})^3=(t+\frac{1}{t})^3-3t\cdot\frac{1}{t}(t+\frac{1}{t})=\underline{(t+\frac{1}{t})^3-3(t+\frac{1}{t})}$

(2) $t+\frac{1}{t}=-3$ のとき、次の値を求めよ。

① $t^2+\frac{1}{t^2}=(t+\frac{1}{t})^2-2=(-3)^2-2=\underline{7}$

② $t^3+\frac{1}{t^3}=(t+\frac{1}{t})^3-3(t+\frac{1}{t})=(-3)^3-3\times(-3)=\underline{-18}$

変形の応用問題

（解説6）次の関係式は変形の公式として、覚えておくこと。

① $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

② $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

問6. $x+y+z=2$ …①， $x^2+y^2+z^2=8$ …②， $xyz=5$ …③ のとき、次の値を求めよ。

(1) $xy+yz+zx$ ヒント
 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
に①②を代入
 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
この式の両辺に①，②の値を代入して、
 $8=2^2-2(xy+yz+zx)$ $xy+yz+zx=\underline{-2}$

(2) $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$ ヒント
 $X^2+Y^2+Z^2=(X+Y+Z)^2-2(XY+YZ+ZX)$
において、 $X=xy$ ， $Y=yz$ ， $Z=zx$ と考える。
右ヒントより
 $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$
 $=\underline{(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+xy^2z+x^2yz)}$
 $=\underline{(xy+yz+zx)^2-2xyz(y+z+x)}$
 $=\underline{(-2)^2-2\cdot5\cdot2=-16}$

問7. 3つの実数 x ， y ， z が $x+y+z=6$ …①， $x^2+y^2+z^2=14$ …②
 $x^3+y^3+z^3=36$ …③ を満たす。このとき、 xyz の値を求めよ。

て、 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ に①，②を代入し
 $14=6^2-2(xy+yz+zx)$
 $\therefore xy+yz+zx=\underline{11}$ …④
 $x^3+y^3+z^3-3xyz$
 $=\underline{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}$
この式より
 $x^3+y^3+z^3$
 $=\underline{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz}$
この式に①，②，③，④を代入して、
 $36=6(14-11)+3xyz \therefore \underline{xyz=6}$

【複2次式の因数分解】

（解説1）【因数分解の鉄則】次数の最も低い文字に着目し、その文字が
1次のときは、降べきの順に並べて 共通因数をくくり出す
2次のときは、降べきの順に並べて たすき掛け
3次以上のときは、必勝法は決まっていない！（置き換える、公式を利用）

問1. $x^2=X$ において、次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+x^2-2
=

(2) x^4-13x^2+36
=

(3) $8x^4+10x^2-3$
=

$x^2=X$ とおくと2次式になるが、因数分解できない場合もある。
例. $x^4+3x^2+4=X^2+3X+4=?$

（準備1）次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4+3x^2+4=\underline{x^4+4}+3x^2=(\underline{x^2+2})^2-\underline{4x^2}+3x^2$
= $(x^2+2)^2-x^2$
= $\{(\quad)+ \quad \}\{(\quad)- \quad \}$

(2) $x^4-5x^2+4=\underline{x^4+4}-5x^2=(\underline{x^2-2})^2+\underline{4x^2}-5x^2$
= $(x^2-2)^2-x^2$
= $\{(\quad)+ \quad \}\{(\quad)- \quad \}$

(3) $4x^4+3x^2+1=\underline{4x^4+1}+3x^2=(\underline{2x^2+1})^2-\underline{4x^2}+3x^2$
= $(2x^2+1)^2-x^2$
= $\{(\quad)+ \quad \}\{(\quad)- \quad \}$

(4) $4x^4-8x^2+1=\underline{4x^4+1}-8x^2=(\underline{2x^2-1})^2+\underline{4x^2}-8x^2$
= $(2x^2-1)^2-4x^2$
= $\{(\quad)+ \quad \}\{(\quad)- \quad \}$

問2. （準備1）の要領で、次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+x^2+1
=

(2) x^4-3x^2+1
=

(3) $9x^4-7x^2+1$
=

問3. x^6-1 の因数分解を次の2通りで求めよ。

【その1】 $x^6-1=(x^3)^2-1^2$
=

【その2】 $x^6-1=(x^2)^3-1^3$
=

問4. x^8-16 の因数分解をせよ。

【3次式の因数分解の公式】

展開公式	$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ $=a^3+b^3+c^3-3abc$
因数分解公式	$a^3+b^3+c^3-3abc$ $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

問5. 上の 展開公式 と 因数分解の公式 を用いて、(1) は展開，(2) は因数分解をせよ。

(1) $(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$
=

(2) $a^3+b^3+1-3ab$
=

【いろいろな変形公式】

（解説2）次の関係式は変形の公式として、覚えておくこと。
① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 別解 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ も知っておけ！
③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
④ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
⑤ $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

問6. $x+\frac{1}{x}=3$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$

(3) $x-\frac{1}{x}$ ヒント
 $x-\frac{1}{x}=a$ において、 a^2 の値を
(1) を用いて求める。±の2個ある。

問7. $x-\frac{1}{x}=2$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$ ヒント
 $x-\frac{1}{x}=2$ の両辺を2乗

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}$ ヒント
因数分解 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$
の公式を使う方がラク！

(3) $x+\frac{1}{x}$ ヒント
問6(3)と同様

問8. $x+y+z=1$ …①, $x^2+y^2+z^2=7$ …②, $xyz=3$ …③ のとき、
次の値を求めよ。

(1) $xy+yz+zx$ ヒント
 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
に①②を代入

(2) $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$ ヒント
 $X^2+Y^2+Z^2=(X+Y+Z)^2-2(XY+YZ+ZX)$
において、 $X=xy$, $Y=yz$, $Z=zx$ と考える。

問9. 3つの実数 x , y , z が $x+y+z=3$ …①, $x^2+y^2+z^2=9$ …②
 $x^3+y^3+z^3=21$ …③ を満たす。このとき、 xyz の値を求めよ。

【複2次式の因数分解】

（解説1）【因数分解の鉄則】次数の最も低い文字に着目し、その文字が
1次の場合は、降べきの順に並べて **共通因数をくくり出す**
2次の場合は、降べきの順に並べて **たすき掛け**
3次以上のときは、必勝法は決まっていない！（置き換える、公式を利用）

問1. $x^2=X$ において、次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+x^2-2
 $=X^2+X-2=(X-1)(X+2)=(x^2-1)(x^2+2)$
 $=\underline{(x+1)(x-1)(x^2+2)}$

(2) x^4-13x^2+36
 $=X^2-13X+36=(X-4)(X-9)=(x^2-4)(x^2-9)$
 $=\underline{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}$

(3) $8x^4+10x^2-3$
 $=8X^2+10X-3=(4X-1)(2X+3)=(4x^2-1)(2x^2+3)$
 $=\underline{(2x+1)(2x-1)(2x^2+3)}$

$x^2=X$ とおくと2次式になるが、因数分解できない場合もある。
例. $x^4+3x^2+4=X^2+3X+4=?$

（準備1）次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4+3x^2+4=\underline{x^4+4}+3x^2=\underline{(x^2+2)^2-4x^2}+3x^2$
 $=(x^2+2)^2-x^2$
 $=\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}$

(2) $x^4-5x^2+4=\underline{x^4+4}-5x^2=\underline{(x^2-2)^2+4x^2}-5x^2$
 $=(x^2-2)^2-x^2$
 $=\{(x^2-2)+x\}\{(x^2-2)-x\}$

(3) $4x^4+3x^2+1=\underline{4x^4+1}+3x^2=\underline{(2x^2+1)^2-4x^2}+3x^2$
 $=(2x^2+1)^2-x^2$
 $=\{(2x^2+1)+x\}\{(2x^2+1)-x\}$

(4) $4x^4-8x^2+1=\underline{4x^4+1}-8x^2=\underline{(2x^2-1)^2+4x^2}-8x^2$
 $=(2x^2-1)^2-4x^2$
 $=\{(2x^2-1)+2x\}\{(2x^2-1)-2x\}$

問2. （準備1）の要領で、次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+x^2+1
 $=\underline{x^4+1}+x^2=\underline{(x^2+1)^2-2x^2}+x^2=(x^2+1)^2-x^2$
 $=\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}=\underline{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

(2) x^4-3x^2+1
 $=\underline{x^4+1}-3x^2=\underline{(x^2-1)^2+2x^2}-3x^2=(x^2-1)^2-x^2$
 $=\{(x^2-1)+x\}\{(x^2-1)-x\}=\underline{(x^2+x-1)(x^2-x-1)}$

(3) $9x^4-7x^2+1$
 $=\underline{9x^4+1}-7x^2=\underline{(3x^2-1)^2+6x^2}-7x^2=(3x^2-1)^2-x^2$
 $=\{(3x^2-1)+x\}\{(3x^2-1)-x\}=\underline{(3x^2+x-1)(3x^2-x-1)}$

問3. x^6-1 の因数分解を次の2通りで求めよ。

【その1】 $x^6-1=(x^3)^2-1^2$
 $=(x^3+1)(x^3-1)$
 $=\underline{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$

【その2】 $x^6-1=(x^2)^3-1^3$
 $=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$
 $=(x+1)(x-1)\{\underline{x^4+1+x^2}\}$
 $=(x+1)(x-1)\{\underline{(x^2+1)^2-2x^2+x^2}\}$
 $=(x+1)(x-1)\{(x^2+1)^2-x^2\}$
 $=\underline{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

問4. x^8-16 の因数分解をせよ。

$x^8-16=(x^4-4)(x^4+4)$
 $=(x^2-2)(x^2+2)(x^4+4)$
 $=(x^2-2)(x^2+2)\{(x^2+2)^2-4x^2\}$
 $=(x^2-2)(x^2+2)\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$
 $=\underline{(x^2-2)(x^2+2)(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

【3次式の因数分解の公式】

展開公式	$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ $=a^3+b^3+c^3-3abc$
因数分解公式	$a^3+b^3+c^3-3abc$ $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

問5. 上の展開公式と因数分解の公式を用いて、(1) は展開、(2) は因数分解をせよ。

(1) $(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+y+x)$
 $=x^3+y^3+(-1)^3-3x\cdot y\cdot (-1)=\underline{x^3+y^3+3xy-1}$

(2) $a^3+b^3+1-3ab$
 $=(a+b+1)(a^2+b^2+1^2-ab-b\cdot 1-1\cdot a)$
 $=\underline{(a+b+1)(a^2+b^2-ab-a-b+1)}$

【いろいろな変形公式】

（解説2）次の関係式は変形の公式として、覚えておくこと。
① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ **別解** $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ も知っておけ！
③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
④ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
⑤ $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

問6. $x+\frac{1}{x}=3$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$
 $=(x+\frac{1}{x})^2-2x\cdot \frac{1}{x}=3^2-2\times 1=\underline{7}$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$
 $=(x+\frac{1}{x})^3-3x\cdot \frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=3^3-3\times 1\times 3=\underline{18}$

(3) $x-\frac{1}{x}$ ヒント
 $x-\frac{1}{x}=a$ において、 a^2 の値を
(1)を用いて求める。±の2個ある。
 $a=x-\frac{1}{x}$ において、 a^2 の値を求める。
 $a^2=(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2x\cdot \frac{1}{x} \leftarrow (1)で求めた値を代入$
 $=7-2=5 \quad a^2=5 \text{ より } \therefore a=x-\frac{1}{x}=\underline{\pm\sqrt{5}}$

問7. $x-\frac{1}{x}=2$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$ ヒント
 $x-\frac{1}{x}=2$ の両辺を2乗
 $=\{x+(-\frac{1}{x})\}^2-2x(-\frac{1}{x})=2^2+2\times 1=\underline{6}$
別解 右ヒントのように $(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=4$ より $x^2+\frac{1}{x^2}=\underline{6}$

(2) $x^3-\frac{1}{x^3}$ ヒント
因数分解
 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$
の公式を使う方がラク！
 $=(x-\frac{1}{x})(x^2+x\cdot \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})$
 $=2\cdot (x^2+\frac{1}{x^2}+1)=2\cdot (6+1)=\underline{14}$

別解 $x^3-\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})^3+3x\cdot \frac{1}{x}(x-\frac{1}{x})=2^3+3\times 1\times 2=\underline{14}$

(3) $x+\frac{1}{x}$ ヒント
問6(3)と同様
 $a=x+\frac{1}{x}$ において、 a^2 の値を求める
 $a^2=(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2x\cdot \frac{1}{x} \leftarrow (1)で求めた値を代入$
 $=6+2=8 \quad a^2=8 \text{ より } \therefore a=x+\frac{1}{x}=\underline{\pm 2\sqrt{2}}$

問8. $x+y+z=1 \cdots \textcircled{1}$, $x^2+y^2+z^2=7 \cdots \textcircled{2}$, $xyz=3 \cdots \textcircled{3}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $xy+yz+zx$ ヒント
 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
に①②を代入
 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
この式の両辺に①, ②の値を代入して、
 $7=1-2(xy+yz+zx) \quad \therefore xy+yz+zx=\underline{-3}$

(2) $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2$ ヒント
右ヒントより
 $X^2+Y^2+Z^2=(X+Y+Z)^2-2(XY+YZ+ZX)$
において、 $X=xy, Y=yz, Z=zx$ と考える。
 $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2=(xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+xy\cdot zx+x^2\cdot yz)$
 $=(xy+yz+zx)^2-2xyz(y+z+x)$
 $=(-3)^2-2\cdot 3\cdot 1=\underline{3}$

問9. 3つの実数 x, y, z が $x+y+z=3 \cdots \textcircled{1}$, $x^2+y^2+z^2=9 \cdots \textcircled{2}$, $x^3+y^3+z^3=21 \cdots \textcircled{3}$ を満たす。このとき、 xyz の値を求めよ。

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ に①, ②を代入して、
 $9=3^2-2(xy+yz+zx)$
 $\therefore xy+yz+zx=0 \cdots \textcircled{4}$
 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
この式より
 $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
この式に ①, ②, ③, ④ を代入して、
 $21=3(9-0)+3xyz \quad \therefore \underline{xyz=-2}$