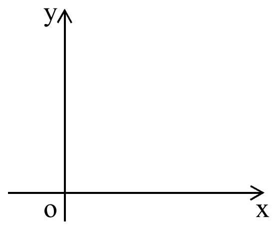
問１．次の関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求めよ。

$y=-x^2+6x+a\ (1\leqq x\leqq 4)$　⟸ a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ



最大値 ＿＿＿＿＿＿

最小値 ＿＿＿＿＿＿

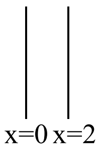
また、この関数の最小値が -2 となるときの定数 a の値を求めよ。

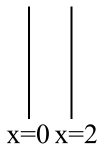
問２．関数 $y=3x^2-6ax+2\ (0\leqq x\leqq 2)$ のグラフについて、

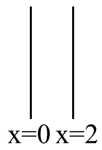
(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 次の場合に分けて、$0\leqq x\leqq 2$ における最小値を求めよ。

(ｱ) $a\leqq 0$ のとき　(ｲ) $0<a\leqq 2$ のとき　(ｳ) $2<a$ のとき、



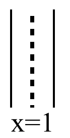


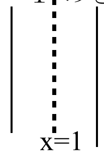


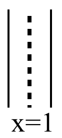
(3) 次の場合に分けて、$0\leqq x\leqq 2$ における最大値を求めよ。

（調べる範囲の x＝0 と x＝2 の真ん中，x＝1 の直線がﾎﾟｲﾝﾄ！　特別な場合！）

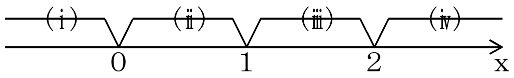
(ｱ) $a<1$ のとき　(ｲ) $a=1$ のとき　(ｳ) $1<a$ のとき







(4) (2) (3) で求めた最大値・最小値を次のように数直線を用いて場合分けせよ。



(i)　$a<0$ のとき、

(ii)　$0\leqq a<1$ のとき、

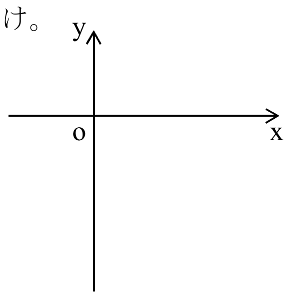
(ii)′　$a=1$ のとき、

(iii)　$1<a\leqq 2$ のとき、

(iv)　$2<a$ のとき、

問３．関数 $f(x)=x^2-2x-1\ (0\leqq x\leqq a)$ のグラフについて、

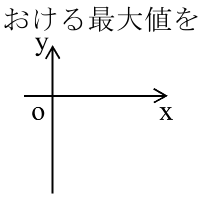
(1) $0\leqq x$ の範囲で、$y=x^2-2x-1$ の グラフをかけ。



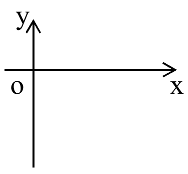
(2) $f(0)=-1$ である。他に、$f(x)=-1$ となる x の値を求めよ。（$x^2-2x-1=-1$ を解く。）

(3) 次の a の値の範囲における最大値を求めよ。

(ｱ) $a\leqq 2$

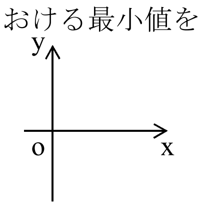


(ｲ) $2<a$

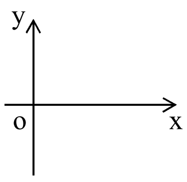


(4) 次の a の値の範囲における最小値を求めよ。

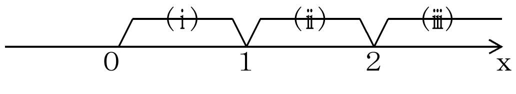
(ｱ) $a\leqq 1$



(ｲ) $1<a$



(5) (3) (4) で求めた最大値・最小値を次のように数直線を用いて場合分けせよ。

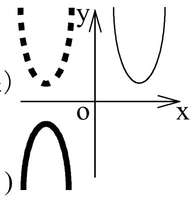


（復１）２次関数 $y=2(x-2)^2+1$ …① について、

(1) ①を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると、頂点は ＿＿＿＿ になるので、その方程式は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。（$y=a(x-p)^2+q$ の形でよい。）

(2) ①を y 軸に関して対称に移動すると、頂点は ＿＿＿＿ になるので、その方程式は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。（右図点線）

(3) ①を 原点に関して対称に移動すると、頂点は ＿＿＿＿ になるので、その方程式は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。（右図太線）



問４．放物線 $y=2x^2+4x$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したときの放物線を次の２通りで求めよ。

【頂点がどこに移動したか】

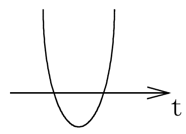
ヒント
(復1)のように、頂点がどこに移動するかを考える
$\boxed{\text{別解}}$
x軸方向に 1
⇒ x を x−1 に
y軸方向に −2
⇒ y を y+2 に

$\boxed{\text{別解}}$

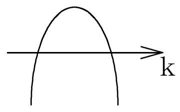
【x を x−1，y を y+2 に】

（準備１）t^2+4t はどんな t の値のときに最小の値になるか。

≪考え方≫ 自分で $y=t^2+4t$ とおいて、２次関数のグラフを考えるとよい。x が t になっても考え方は同じである。

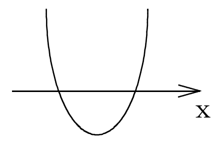


問５．$-k^2+2k$ はどんな k の値のときに最大の値になるか。

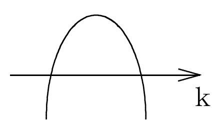


問６．k は定数とする。２次関数 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値を m とする。

(1) m は k の関数である。m を k の式で表せ。



(2) (1)の k の関数の最大値とそのときの k の値を求めよ。

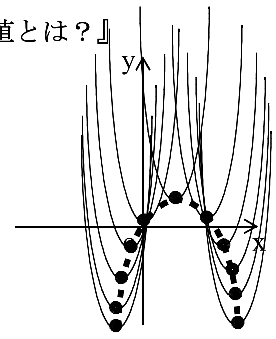


（解説１）上の問６．において、

『$y=x^2+4kx+24k$ の最小値 $-4k^2+24k$ の最大値とは？』

（説明）$y=x^2+4kx+24k=(x+2k)^2-4k^2+24k$

このグラフは下に凸で、最小値とは の● の y 座標である。今、k の値をいろいろ変えると、グラフは右図のようにいろいろ変化する。それらのグラフの最小値とは、１つずつの各● の y 座標であり、最小値 $-4k^2+24k$ の最大値とは、右図● の集まりの中での y 座標の最も大きい所の y 座標である。



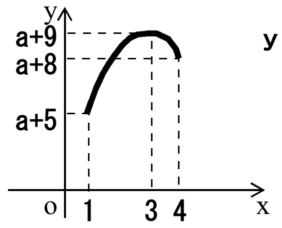
問７．$x\geqq 0$ …①，$y\geqq 0$ …②，$3x+y=8$ …③ のとき、xy の最大値，最小値を次の手順で求めよ。

(1) ③より $y=-3x+8$ を ② に代入して、その不等式と ① より x の値の範囲を求めよ。

(2) $Y=xy$ を x のみで表し、(1) の範囲で最大値・最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

問１．次の関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求めよ。

$y=-x^2+6x+a$ （$1\leqq x\leqq 4$）　⟸ a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ



$y=-(x^2-6x)+a$
$=-\{(x-3)^2-9\}+a$
$=-(x-3)^2+a+9$

最大値　**$x=3$ のとき $a+9$**
最小値　**$x=1$ のとき $a+5$**

また、この関数の最小値が -2 となるときの定数 a の値を求めよ。

$a+5=-2$ を解いて、$a=-7$

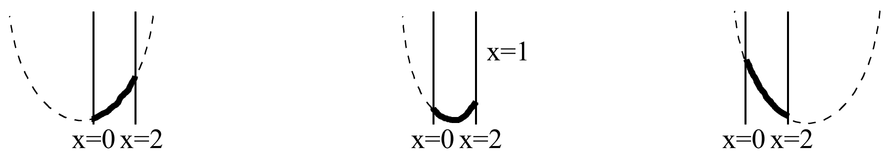
問２．関数 $y=3x^2-6ax+2$ ($0\leqq x\leqq 2$) のグラフについて、

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=3(x^2-2ax)+2=3\{(x-a)^2-a^2\}+2$
$=3(x-a)^2-3a^2+2$　　頂点 $(a,\ -3a^2+2)$

(2) 次の場合に分けて、$0\leqq x\leqq 2$ における最小値を求めよ。

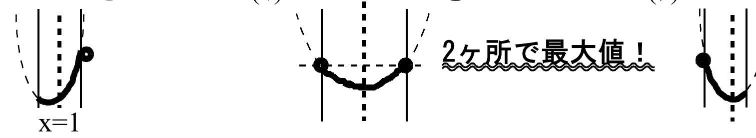
(ア) $a\leqq 0$ のとき　(イ) $0<a\leqq 2$ のとき　(ウ) $2<a$ のとき、



$x=0$ のとき 2　　**$x=a$ のとき $-3a^2+2$**　　**$x=2$ のとき $14-12a$**

(3) 次の場合に分けて、$0\leqq x\leqq 2$ における最大値を求めよ。
（調べる範囲の $x=0$ と $x=2$ の真ん中，$x=1$ の直線がﾎﾟｲﾝﾄ！特別な場合！）

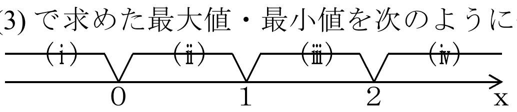
(ア) $a<1$ のとき　(イ) $a=1$ のとき　(ウ) $1<a$ のとき



$x=2$ のとき $14-12a$　　**$x=0,\ 2$ のとき $14-12a=2$**　　**$x=0$ のとき 2**

《注意》最大値を求めるだけなら(x座標を表示しないで)
$a\leqq 1$ のとき $14-12a$　，$1<a$ のとき 2　としてもよい
（等号はどちらにつけてもよい）

(4) (2)(3)で求めた最大値・最小値を次のように数直線を用いて場合分けせよ。



（i）$a<0$ のとき、　**最大値は、(3)(ア)より $x=2$ のとき、$14-12a$**
最小値は、(2)(ア)より $x=0$ のとき、2

（ii）$0\leqq a<1$ のとき、　**最大値は、(3)(ア)より $x=2$ のとき、$14-12a$**
最小値は、(2)(イ)より $x=a$ のとき、$-3a^2+2$

（ii）′ $a=1$ のとき、　**最大値は、(3)(ア)より $x=0,\ 2$ のとき、$14-12a$**
最小値は、(2)(イ)より $x=a=1$ のとき、-1

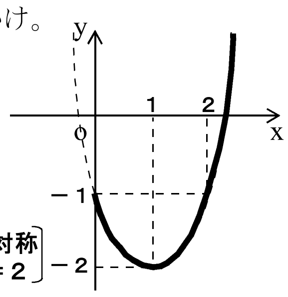
（iii）$1<a\leqq 2$ のとき、　**最大値は、(3)(イ)より $x=0$ のとき、2**
最小値は、(2)(イ)より $x=a$ のとき、$-3a^2+2$

（iv）$2<a$ のとき、　**最大値は、(3)(イ)より $x=0$ のとき、2**
最小値は、(2)(ウ)より $x=2$ のとき、$14-12a$

問３．関数 $f(x)=x^2-2x-1$ ($0\leqq x\leqq a$) のグラフについて、

(1) $0\leqq x$ の範囲で、$y=x^2-2x-1$ の グラフをかけ。

$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-1-1$
$=(x-1)^2-2$

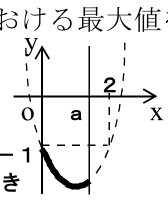


(2) $f(0)=-1$ である。他に、$f(x)=-1$ となる x の値を求めよ。（$x^2-2x-1=-1$ を解く。）

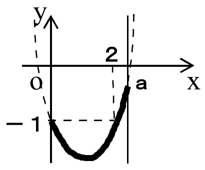
$x^2-2x-1=-1$ を解くと、$x^2-2x=0$
$x=0,\ 2$　∴ $x=2$　　**別解 軸 $x=1$ を中心に対称であることより、$x=2$**

(3) 次の a の値の範囲における最大値を求めよ。

(ア) $a\leqq 2$　**$x=0$ のとき -1**
ただし、$a=2$ のときは $x=0,\ 2$ のとき

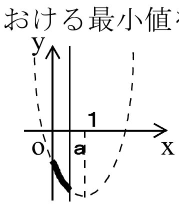


(イ) $2<a$　**$x=a$ のとき a^2-2a-1**

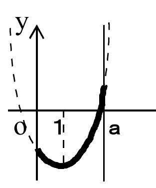


(4) 次の a の値の範囲における最小値を求めよ。

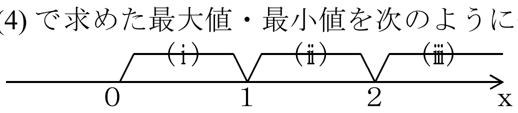
(ア) $a\leqq 1$　**$x=a$ のとき a^2-2a-1**



(イ) $1<a$　**$x=1$ のとき -2**



(5) (3)(4)で求めた最大値・最小値を次のように数直線を用いて場合分けせよ。



（i）**$0<a<1$ のとき、**　**最大値は、(3)(ア)より $x=0$ のとき、-1**
最小値は、(4)(ア)より $x=a$ のとき、a^2-2a-1

（ii）**$1\leqq a<2$ のとき、**　**最大値は、(3)(ア)より $x=0$ のとき、-1**
最小値は、(4)(イ)より $x=1$ のとき、-2

（ii）′ **$a=2$ のとき、**　**最大値は、(3)(ア)より $x=0,\ 2$ のとき、-1**
最小値は、(4)(イ)より $x=1$ のとき、-2

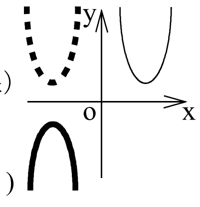
（iii）**$2<a$ のとき、**　**最大値は、(3)(イ)より $x=a$ のとき、a^2-2a-1**
最小値は、(4)(イ)より $x=1$ のとき、-2

（復１）２次関数 $y=2(x-2)^2+1$ …① について、

(1) ①を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると、頂点は **$(-1,\ 3)$** になるので、その方程式は **$y=2(x+1)^2+3$** である。（$y=a(x-p)^2+q$の形でよい。）

(2) ①を y 軸に関して対称に移動すると、頂点は **$(-2,\ 1)$** になるので、その方程式は **$y=2(x+2)^2+1$** である。（右図点線）

(3) ①を 原点に関して対称に移動すると、頂点は **$(-2,\ -1)$** になるので、その方程式は **$y=2(x+2)^2-1$** である。（右図太線）



問４．放物線 $y=2x^2+4x$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したときの放物線を次の２通りで求めよ。

【頂点がどこに移動したか】　**$y=2x^2+4x=2(x^2+2x)$**
$=2\{(x+1)^2-1\}=2(x+1)^2-2$

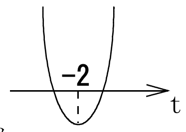
頂点 $(-1,\ -2)$ がこの平行移動によって、$(0,\ -4)$
∴ $y=2x^2-4$

ヒント
（復１）のように、頂点がどこに移動するかを考える
別解
x軸方向に 1 ⇒ x を $x-1$ に
y軸方向に -2 ⇒ y を $y+2$ に

別解
【x を $x-1$, y を $y+2$ に】 $y=2x^2+4x$ の x を $x-1$　y を $y+2$ にすると、
$y+2=2(x-1)^2+4(x-1)$，$y=2x^2-4$

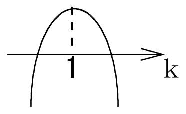
（準備１）t^2+4t はどんな t の値のときに最小の値になるか。
≪考え方≫ 自分で $y=t^2+4t$ とおいて、２次関数のグラフを考えるとよい。
x が t になっても考え方は同じである。

$y=t^2+4t=(t+2)^2-4$
右のグラフより、$t=-2$ のとき 最小値 -4



問５．$-k^2+2k$ はどんな k の値のときに最大の値になるか。

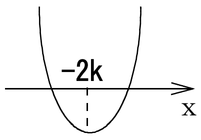
$y=-k^2+2k$ とおいてグラフを考えると、
$y=-(k^2-2k)=-\{(k-1)^2-1\}$
$=-(k-1)^2+1$
右のグラフより、$k=1$ のとき 最大値 1



問６．k は定数とする。２次関数 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値を m とする。

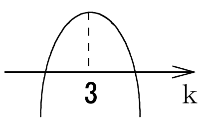
(1) m は k の関数である。m を k の式で表せ。

$y=x^2+4kx+24k=(x+2k)^2-4k^2+24k$
右のグラフより、
$x=-2k$ のとき 最小値 $m=-4k^2+24k$



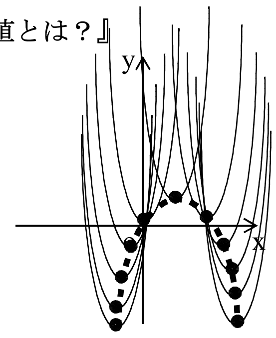
(2) (1)の k の関数の最大値とそのときの k の値を求めよ。

$m=-4k^2+24k$ のグラフを考えると、
$m=-4(k^2-6k)=-4\{(k-3)^2-9\}$
∴ $m=-4(k-3)^2+36$



右の k についてのグラフより、$k=3$ のとき 最大値 36

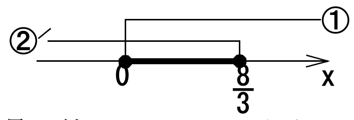
（解説１）上の問６．において、
『 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値 $-4k^2+24k$ の最大値とは？』
（説明）$y=x^2+4kx+24k=(x+2k)^2-4k^2+24k$
このグラフは下に凸で、最小値とは の● のy座標である。今、k の値をいろいろ変えると、グラフは右図のようにいろいろ変化する。それらのグラフの最小値とは、１つずつの各● のy座標であり、最小値 $-4k^2+24k$ の最大値とは、右図● の集まりの中での y座標の最も大きい所の y座標である。



問７．$x\geqq 0$ …①，$y\geqq 0$ …②，$3x+y=8$ …③ のとき、xy の最大値，最小値を次の手順で求めよ。

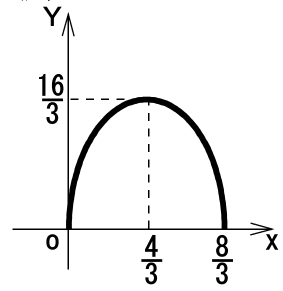
(1) ③より $y=-3x+8$ を ② に代入して、その不等式と ① より x の値の範囲を求めよ。

$y=-3x+8\geqq 0$ より $x\leqq \dfrac{8}{3}$ …②′
これと ① の $0\leqq x$ より　$0\leqq x\leqq \dfrac{8}{3}$



(2) $Y=xy$ を x のみで表し、(1)の範囲で最大値・最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

$y=-3x+8$ を代入して、
$Y=xy=x(-3x+8)=-3x^2+8x$
$=-3\left(x^2-\dfrac{8}{3}x\right)=-3\left\{\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2-\dfrac{16}{9}\right\}$
$Y=-3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{16}{3}$　ただし、$0\leqq x\leqq \dfrac{8}{3}$
$0\leqq x\leqq \dfrac{8}{3}$ における右図グラフより、



(ア) $x=\dfrac{4}{3}$ のとき、最大値 $\dfrac{16}{3}$
$x=\dfrac{4}{3}$ を ③ に代入して、$y=4$
(イ) $x=0,\ \dfrac{8}{3}$ のとき、最小値 0
$x=0$ を ③ に代入して、$y=8$
$x=\dfrac{8}{3}$ を ③ に代入して、$y=0$

(答) **$x=\dfrac{4}{3}$，$y=4$ のとき、最大値 $\dfrac{16}{3}$**
$x=0$，$y=8$ または $x=\dfrac{8}{3}$，$y=0$ のとき、最小値 0

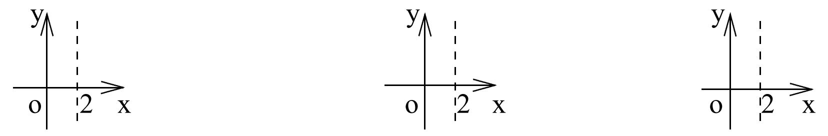
問１．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y=1$ のとき、x^2+y^2 の最大値・最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

問２．$f(x)=x^2-2ax-a+8$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値 $m(a)$，最大値 $M(a)$ を次の手順で求めよ。

(1) 頂点の x 座標を求めよ。

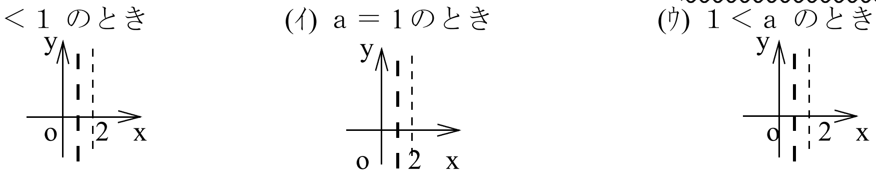
(2) 頂点の x 座標の場合分けをして、最小値 $m(a)$ を求めよ。

(ｱ) $a \leqq 0$ のとき　(ｲ) $0 < a \leqq 2$ のとき　(ｳ) $2 < a$ のとき



(3) 頂点の x 座標の場合分けをして、最大値 $M(a)$ を求めよ。**特別な場合に注意！**

(ｱ) $a < 1$ のとき　(ｲ) $a = 1$ のとき　(ｳ) $1 < a$ のとき



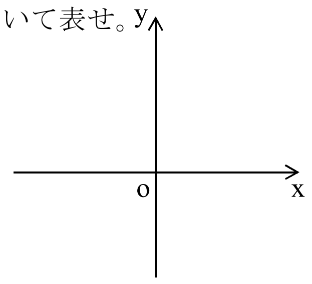
問３．$a < 0$ とする。関数 $y=ax+b\ (-2 \leqq x \leqq 1)$…① について、

(1) ①のグラフをかいて、最大値・最小値を a，b を用いて表せ。

（a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ。）

最大値 ＿＿＿＿＿＿＿＿

最小値 ＿＿＿＿＿＿＿＿



(2) ①の値域が $-1 \leqq y \leqq 4$ となるとき、定数 a，b の値を求めよ。

問４．放物線 $y=x^2-3x+2$ を平行移動したグラフで、２点 $(1,2)$，$(2,3)$ を通る２次関数を求めよ。

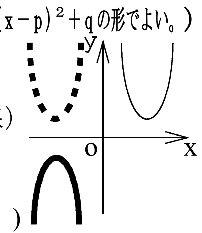
ヒント
平行移動しても、x^2 の係数だけは変わらない。
$y=x^2+bx+c$ の形

（復１）２次関数 $y=2(x-3)^2+1$ …① について、

(1) ① を x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると、頂点は ＿＿＿＿ になるので、その方程式は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。（$y=a(x-p)^2+q$ の形でよい。）

(2) ① を y 軸に関して対称に移動すると、頂点は ＿＿＿＿ になるので、その方程式は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。（右図点線）

(3) ① を 原点に関して対称に移動すると、頂点は ＿＿＿＿ になるので、その方程式は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。（右図太線）



問５．放物線 $y=2x^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に -6 だけ平行移動すると、頂点の座標が $(-1,1)$ となった。このときの b，c の値を次のように求めてみよ。

(解) x 軸方向に -2，y 軸方向に -6 だけ平行移動したとき、頂点が $(-1,1)$ となったのであるから、もとの放物線の頂点の座標は $\boxed{}$ である。放物線は平行移動しても x^2 の係数は変わらない。

したがって、この頂点から、もとの放物線は $\boxed{}$

これと、$y=2x^2+bx+c$ の係数を比較して、b，c の値を求めよ。

問６．x^2 の係数が 1，点 $(2,3)$ を通り、頂点が直線 $y=x+1$ 上にある２次関数を求めよ。

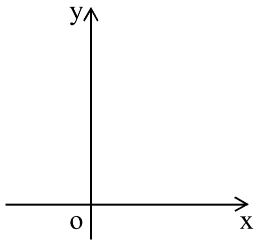
(解) 頂点の x 座標を p とおくと、頂点が直線 $y=x+1$ 上より

頂点の座標は、$(p, \boxed{})$ とおける。

問７．$y=2x^2+3x$ を平行移動したもので、点 $(1,3)$ を通り、頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある２次関数を求めよ。

問８．次の関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求めよ。（ただし、$a<0$）

$y=ax^2-2ax+5\ (-1 \leqq x \leqq 2)$　⟸ a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ



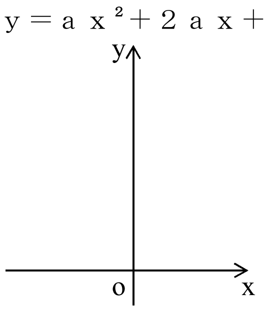
最大値 ＿＿＿＿＿＿＿＿

最小値 ＿＿＿＿＿＿＿＿

また、この関数の最小値が -1 となるときの定数 a の値を求めよ。

問９．次の関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求めよ。（ただし、$a<0$）

$y=ax^2+2ax+b\ (-2 \leqq x \leqq 1)$　⟸ a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ



最大値 ＿＿＿＿＿＿＿＿

最小値 ＿＿＿＿＿＿＿＿

この関数の最大値が 5，最小値が -3 となるときの定数 a，b の値を求めよ。

問 10．放物線 $y=2x^2-4x+4$ …① について、

(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) ① のグラフを x 軸に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

ヒント
(その1) y を $-y$ におきかえる。
(その2) 頂点の座標がどこに移動したかを考える。
（x^2 の係数は ± が入れ替わる。）

(3) ① のグラフを y 軸に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

ヒント
(その1) x を $-x$ におきかえる。
(その2) 頂点の座標がどこに移動したかを考える。
（x^2 の係数は変わらない。）

(4) ① のグラフを原点に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

ヒント
(その1) x を $-x$，y を $-y$ におきかえる。
(その2) 頂点の座標がどこに移動したかを考える。
（x^2 の係数は ± が入れ替わる。）

問１．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y=1$ のとき、x^2+y^2 の最大値・最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

$Y=x^2+y^2$ とおいて、$y=1-2x$ を代入すると、

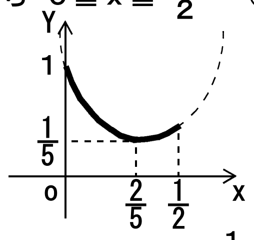
$$Y=x^2+(1-2x)^2=5x^2-4x+1=5\left(x^2-\frac{4}{5}x\right)+1$$
$$=5\left\{\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{25}\right\}+1=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}+1$$
$$\therefore\ Y=5\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}\ \cdots①$$

ところで、$y=1-2x \geqq 0$ また、$x \geqq 0$ の条件から $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ …②

② の範囲で、① の最大値・最小値を考えると

右のグラフより、$x=0$ のとき、最大値 1

$x=\frac{2}{5}$ のとき、最小値 $\frac{1}{5}$



$x=0$ を $2x+y=1$ に代入して $y=1$

$x=\frac{2}{5}$ を $2x+y=1$ に代入して $y=\frac{1}{5}$

$x=0$，$y=1$ のとき、最大値 1　$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ のとき、最小値 $\frac{1}{5}$

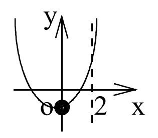
問２．$f(x)=x^2-2ax-a+8$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値 $m(a)$，最大値 $M(a)$ を次の手順で求めよ。

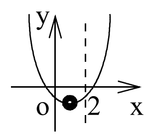
(1) 頂点の x 座標を求めよ。

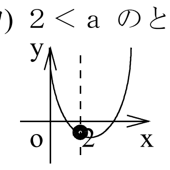
$f(x)=(x-a)^2-a^2-a+8$ より $x=a$

(2) 頂点の x 座標の場合分けをして、最小値 $m(a)$ を求めよ。

(ｱ) $a \leqq 0$ のとき　(ｲ) $0 < a \leqq 2$ のとき　(ｳ) $2 < a$ のとき



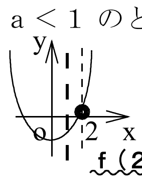


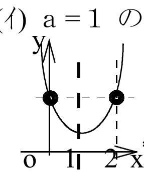


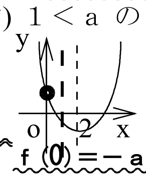
$f(0)=-a+8$　　$f(a)=-a^2-a+8$　　$f(2)=-5a+12$

(3) 頂点の x 座標の場合分けをして、最大値 $M(a)$ を求めよ。**特別な場合に注意！**

(ｱ) $a<1$ のとき　(ｲ) $a=1$ のとき　(ｳ) $1<a$ のとき







$f(2)=-5a+12$　　$f(0)=f(2)=7$　2ヶ所で最大値！　　$f(0)=-a+8$

問３．$a<0$ とする。関数 $y=ax+b\ (-2 \leqq x \leqq 1)$ …① について、

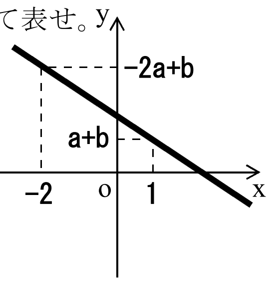
(1) ①のグラフをかいて、最大値・最小値を a，b を用いて表せ。

（a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ。）

直線の傾き $a<0$ より右図のような直線になる。

最大値　**$x=-2$ のとき　$-2a+b$**

最小値　**$x=1$ のとき　$a+b$**



(2) ①の値域が $-1 \leqq y \leqq 4$ となるとき、定数 a，b の値を求めよ。

グラフより 最大値 $-2a+b$，最小値 $a+b$ であるから、

値域は $a+b \leqq y \leqq -2a+b$ これが $-1 \leqq y \leqq 4$ と一致するので、

$$\begin{cases}-2a+b=4 & \cdots②\\ a+b=-1 & \cdots③\end{cases}$$

②,③ を解いて、$a=-\frac{5}{3}$，$b=\frac{2}{3}$

このとき、$a<0$ の条件を満たしている。

問４．放物線 $y=x^2-3x+2$ を平行移動したグラフで、２点 $(1,2)$，$(2,3)$ を通る２次関数を求めよ。

$y=x^2-3x+2$ を平行移動しても x^2 の係数は同じであるから、求める２次関数のグラフは、

$y=x^2+bx+c$ …① とおける

ヒント
平行移動しても、x^2 の係数だけは変わらない。
$y=x^2+bx+c$ の形

① に、２点 $(1,2)$，$(2,3)$ を代入して、

$1+b+c=2 \Rightarrow b+c=1$ …②

$4+2b+c=3 \Rightarrow 2b+c=-1$ …③

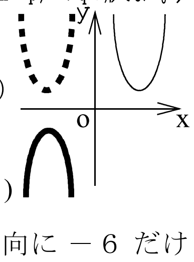
②,③ を解いて、$b=-2$，$c=3$　∴ $y=x^2-2x+3$

（復１）２次関数 $y=2(x-3)^2+1$ …① について、

(1) ① を x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると、頂点は **$(1,3)$** になるので、その方程式は **$y=2(x-1)^2+3$** である。（$y=a(x-p)^2+q$ の形でよい。）

(2) ① を y 軸に関して対称に移動すると、頂点は **$(-3,1)$** になるので、その方程式は **$y=2(x+3)^2+1$** である。（右図点線）

(3) ① を 原点に関して対称に移動すると、頂点は **$(-3,-1)$** になるので、その方程式は **$y=-2(x+3)^2-1$** である。（右図太線）



問５．放物線 $y=2x^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に -6 だけ平行移動すると、頂点の座標が $(-1,1)$ となった。このときの b，c の値を次のように求めてみよ。

(解) x 軸方向に -2，y 軸方向に -6 だけ平行移動したとき、頂点が $(-1,1)$ となったのであるから、もとの放物線の頂点の座標は $\boxed{(1,7)}$ である。放物線は平行移動しても x^2 の係数は変わらない。

したがって、この頂点から、もとの放物線は $\boxed{y=2(x-1)^2+7}$

これと、$y=2x^2+bx+c$ の係数を比較して、b，c の値を求めよ。

$y=2(x-1)^2+7=2x^2-4x+9$ これが $y=2x^2+bx+c$ と一致するので、$b=-4$，$c=9$

問６．x^2 の係数が 1，点 $(2,3)$ を通り、頂点が直線 $y=x+1$ 上にある２次関数を求めよ。

(解) 頂点の x 座標を p とおくと、頂点が直線 $y=x+1$ 上より頂点の座標は、$(p,\ \boxed{p+1})$ とおける。

この頂点 $(p,p+1)$ と x^2 の係数が 1 より、求める２次関数は

$y=(x-p)^2+p+1$ …① とおける。

① が 点 $(2,3)$ を通るから、代入して、$3=(2-p)^2+p+1$

$p^2-3p+2=0$，$(p-1)(p-2)=0$，$p=1,\ 2$

$p=1$ を ① に代入して、$y=(x-1)^2+2$

$p=2$ を ① に代入して、$y=(x-2)^2+3$

問７．$y=2x^2+3x$ を平行移動したもので、点 $(1,3)$ を通り、頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある２次関数を求めよ。

頂点の x 座標を p とおくと、頂点は $(p,2p-3)$ とおける。

$y=2x^2+3x$ を平行移動しても x^2 の係数は同じ 2 であるから、

求める２次関数は、$y=2(x-p)^2+2p-3$ …① とおける。

① が 点 $(1,3)$ を通るから、代入して、$3=2(1-p)^2+2p-3$

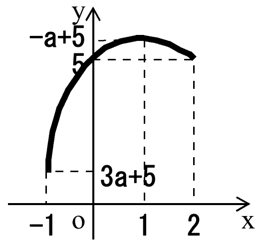
$2p^2-2p-4=0$，$2(p+1)(p-2)=0$，$p=-1,\ 2$

$p=-1$ を ① に代入して、$y=2(x+1)^2-5$

$p=2$ を ① に代入して、$y=2(x-2)^2+1$

問８．次の関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求めよ。（ただし、$a<0$）

$y=ax^2-2ax+5\ (-1 \leqq x \leqq 2)$　⟸ a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ



$y=a(x^2-2x)+5=a\{(x-1)^2-1\}+5$

$y=a(x-1)^2-a+5\ (a<0)$

上に 凸 の放物線を $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲でかいて、求める。

最大値　**$x=1$ のとき $-a+5$**

最小値　**$x=-1$ のとき $3a+5$**

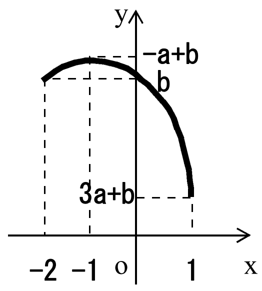
また、この関数の最小値が -1 となるときの定数 a の値を求めよ。

最小値 $3a+5=-1$ を解いて、$a=-2$

これは、条件 $a<0$ を満たす。　∴ $a=-2$

問９．次の関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求めよ。（ただし、$a<0$）

$y=ax^2+2ax+b\ (-2 \leqq x \leqq 1)$　⟸ a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ



$y=a(x^2+2x)+b=a\{(x+1)^2-1\}+b$

$y=a(x+1)^2-a+b\ \ (a<0)$

上に 凸 の放物線を $-2 \leqq x \leqq 1$ の範囲でかいて、求める。

最大値　**$x=-1$ のとき $-a+b$**

最小値　**$x=1$ のとき $3a+b$**

この関数の最大値が 5，最小値が -3 となるときの定数 a，b の値を求めよ。

$$\begin{cases}-a+b=5 & \cdots①\\ 3a+b=-3 & \cdots②\\ a<0 & \cdots③\end{cases}$$

①,② の連立方程式を解いて、$a=-2$，$b=3$

$a=-2$ は ③ を満たす

∴ $a=-2$，$b=3$

問 10．放物線 $y=2x^2-4x+4$ …① について、

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=2(x^2-2x)+4=2\{(x-1)^2-1\}+4=2(x-1)^2-2+4$

$=2(x-1)^2+2$　∴ 頂点 $(1,2)$

(2) ① のグラフを x 軸に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

(その1) $y=2x^2-4x+4$ の y を $-y$ にかえて

$-y=2x^2-4x+4$ より $y=-2x^2+4x-4$

ヒント
(その1)　y を $-y$ におきかえる。
(その2)　頂点の座標がどこに移動したかを考える。
（x^2 の係数は ± が入れ替わる。）

(その2) 頂点 $(1,2)$ が $(1,-2)$ になり、

x^2 の係数 2 が -2 になるので、$y=-2(x-1)^2-2$

(3) ① のグラフを y 軸に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

(その1) $y=2x^2-4x+4$ の x を $-x$ にかえて

$y=2(-x)^2-4(-x)+4$ より

$y=2x^2+4x+4$

ヒント
(その1)　x を $-x$ におきかえる。
(その2)　頂点の座標がどこに移動したかを考える。
（x^2 の係数は変わらない。）

(その2) 頂点 $(1,2)$ が $(-1,2)$ になり、

x^2 の係数 2 は、そのままなので、$y=2(x+1)^2+2$

(4) ① のグラフを原点に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

(その1) $y=2x^2-4x+4$ の x を $-x$，y を $-y$ にかえて、$-y=2(-x)^2-4(-x)+4$ より

$y=-2x^2-4x-4$

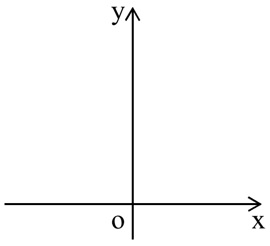
ヒント
(その1)　x を $-x$，y を $-y$ におきかえる。
(その2)　頂点の座標がどこに移動したかを考える。
（x^2 の係数は ± が入れ替わる。）

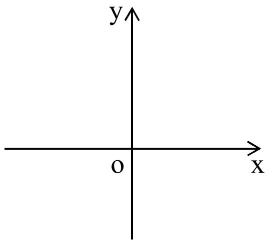
(その2) 頂点 $(1,2)$ が $(-1,-2)$ になり、x^2 の係数 2 が -2 になるので、

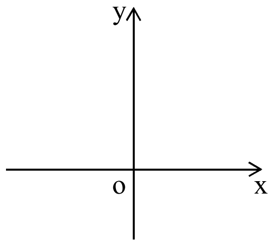
$y=-2(x+1)^2-2$

1 次のグラフをかき、頂点の座標，最大値・最小値 を示せ。

(1) $y=x^2+1$　(2) $y=2x^2-1$　(3) $y=-2x^2+4$





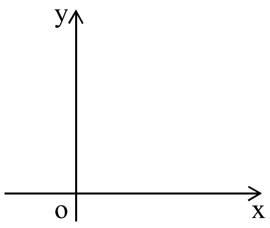


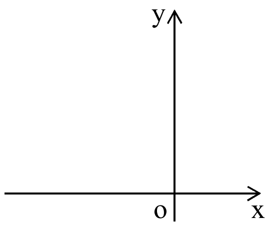
頂点 ＿＿＿＿　頂点 ＿＿＿＿　頂点 ＿＿＿＿

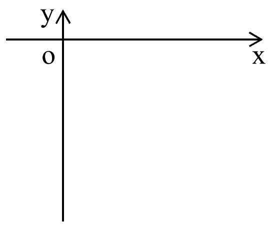
最大値 ＿なし＿　最大値 ＿＿＿＿　最大値 ＿＿＿＿

最小値 ＿x＝　のとき＿　最小値 ＿＿＿＿　最小値 ＿＿＿＿

(4) $y=(x-2)^2$　(5) $y=2(x+2)^2$　(6) $y=-2(x-3)^2$





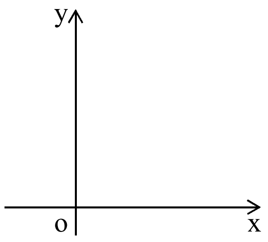


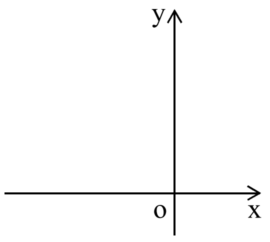
頂点 ＿＿＿＿　頂点 ＿＿＿＿　頂点 ＿＿＿＿

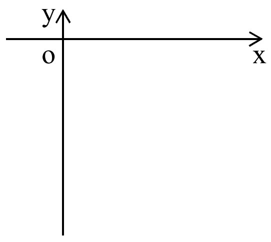
最大値 ＿なし＿　最大値 ＿＿＿＿　最大値 ＿＿＿＿

最小値 ＿x＝　のとき＿　最小値 ＿＿＿＿　最小値 ＿＿＿＿

(7) $y=(x-3)^2+2$　(8) $y=2(x+2)^2-1$　(9) $y=-2(x-3)^2-1$







頂点 ＿＿＿＿　頂点 ＿＿＿＿　頂点 ＿＿＿＿

最大値 ＿なし＿　最大値 ＿＿＿＿　最大値 ＿＿＿＿

最小値 ＿x＝　のとき＿　最小値 ＿＿＿＿　最小値 ＿＿＿＿

2 次の２次関数を変形して、(ｱ) 軸の方程式，(ｲ) 頂点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2-2x-4$

(ｱ) 軸の方程式 ＿＿＿＿　(ｲ) 頂点の座標 ＿＿＿＿

(2) $y=2x^2-2x+3$

(ｱ) 軸の方程式 ＿＿＿＿　(ｲ) 頂点の座標 ＿＿＿＿

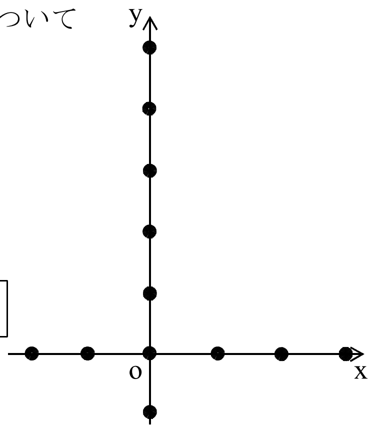
(3) $y=-2x^2+4x+1$

(ｱ) 軸の方程式 ＿＿＿＿　(ｲ) 頂点の座標 ＿＿＿＿

3 関数 $y=x^2-2x+2$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ について

(1) 変形して、頂点の座標を求めよ。

(2) $-1\leqq x\leqq 2$ の範囲のみ、このグラフをかけ。
（この範囲以外はかかないこと！）



(3) 定義域は ［　　　］　値域は ［　　　］

(4) 最大値は ［ x＝　　のとき ］

最小値は ［ x＝　　のとき ］

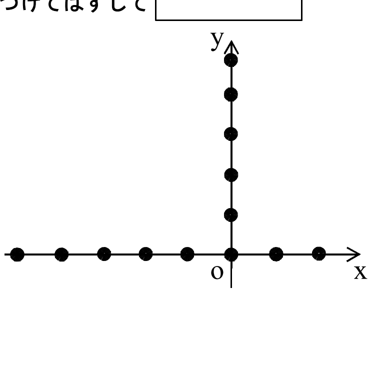
（準備１）例の要領で、次の絶対値をはずせ。

例．$|x-1|=$
- (ｱ) $x-1\geqq 0$ $(x\geqq 1)$ のとき そのままはずして　$x-1$
- (ｲ) $x-1<0$ $(x<1)$ のとき －をつけてはずして　$-(x-1)$

$|x+2|=$
- (ｱ) ［　　］ のとき そのままはずして ［　　］
- (ｲ) ［　　］ のとき －をつけてはずして ［　　］

4 関数 $y=|x+2|$ について、

(1) (準備１)の場合分けを参考にグラフをかけ。



(2) この関数の値域は ［　　　］

(3) 最小値は ［　　　］

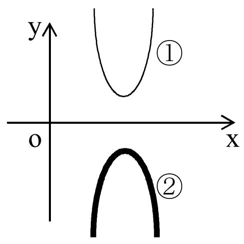
注：このとき、『最大値はなし』である。

5 ２次関数 $y=x^2-4x+5$ …① について、

(1) ① を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形し、頂点の座標を求めよ。

(2) ① のグラフを x 軸方向に ２ ，y 軸方向に －３ だけ平行移動すると、頂点は ＿＿＿＿ に移動するので、その方程式は ＿＿＿＿＿＿ である。

(3) ① のグラフを x 軸に関して対称に移動すると、右図 ① が太線 ② のグラフになる。この太線 ② の頂点は ＿＿＿＿ であるので、その方程式は ＿＿＿＿＿＿ である。



6 (1) 頂点の座標が (1, 2) で、点 (－1, 6) を通る２次関数を求めよ。

（ヒント　頂点 (1, 2) より $y=a(x-1)^2+2$ の形になることがわかる。）

(2) 軸の方程式が $x=2$ で、２点 (1, －3), (－1, 13) を通る２次関数を求めよ。

（ヒント　軸の方程式が $x=2$ より $y=a(x-2)^2+q$ の形になることがわかる。）

7 ２次関数のグラフが ３点 (－1, 0), (2, 3), (3, －4) を通るとき、その２次関数を求めよ。

（ヒント　$y=a(x-p)^2+q$ とおいて３点を代入すると計算がシンドイ　$y=ax^2+bx+c$ とおいて３点を代入する。）

8 $x=1$ のとき最大値 ４ をとり、$x=2$ のとき $y=3$ となる２次関数を求めよ。

9 ２次関数 $y=x^2-4x+a$ について、(ただし、a は定数とする。)

(1) 最小値を求めよ。

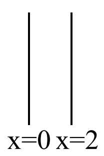
(2) (1) で求めた最小値が －３ になるような a の値を求めよ。

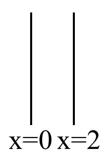
10 関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0\leqq x\leqq 2)$ のグラフについて、

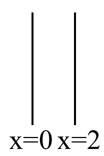
(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 次の場合に分けて、$0\leqq x\leqq 2$ における最小値を求めよ。

(ｱ) $a\leqq 0$ のとき　(ｲ) $0<a\leqq 2$ のとき　(ｳ) $2<a$ のとき、

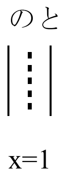


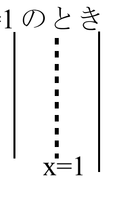


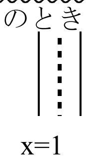


(3) 次の場合に分けて、$0\leqq x\leqq 2$ における最大値を求めよ。
（調べる範囲の $x=0$ と $x=2$ の真ん中，$x=1$ の直線がポイント！特別な場合！）

(ｱ) $a<1$ のとき　(ｲ) $a=1$ のとき　(ｳ) $1<a$ のとき

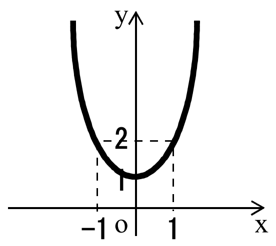
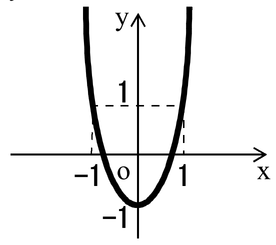
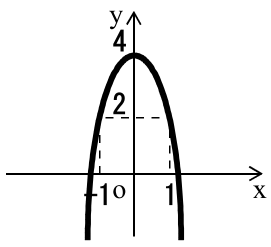






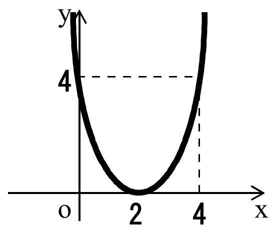
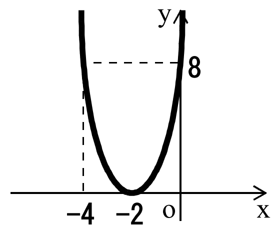
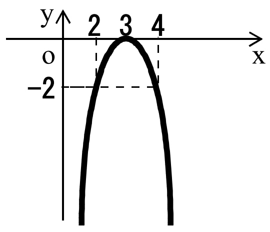
1 次のグラフをかき、頂点の座標，最大値・最小値 を示せ。

(1) $y=x^2+1$　(2) $y=2x^2-1$　(3) $y=-2x^2+4$

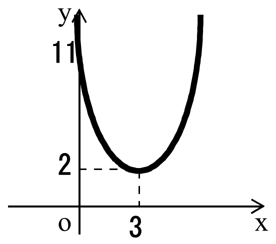
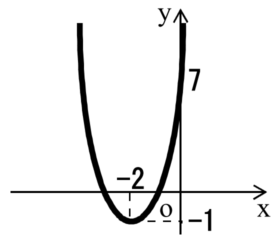
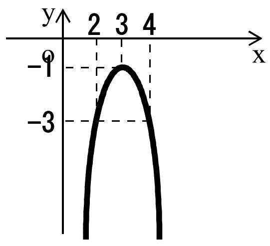
	(1)	(2)	(3)
頂点	(0, 1)	(0, −1)	(0, 4)
最大値	なし	なし	x＝0 のとき 4
最小値	x＝0 のとき 1	x＝0 のとき −1	なし

(4) $y=(x-2)^2$　(5) $y=2(x+2)^2$　(6) $y=-2(x-3)^2$

	(4)	(5)	(6)
頂点	(2, 0)	(−2, 0)	(3, 0)
最大値	なし	なし	x＝3 のとき 0
最小値	x＝2 のとき 0	x＝−2 のとき 0	なし

(7) $y=(x-3)^2+2$　(8) $y=2(x+2)^2-1$　(9) $y=-2(x-3)^2-1$

	(7)	(8)	(9)
頂点	(3, 2)	(−2, −1)	(3, −1)
最大値	なし	なし	x＝3 のとき −1
最小値	x＝3 のとき 2	x＝−2 のとき −1	なし

2 次の２次関数を変形して、(ｱ) 軸の方程式，(ｲ) 頂点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2-2x-4$

$y=\{(x-1)^2-1^2\}-4=(x-1)^2-5$

(ｱ) 軸の方程式 $x=1$　(ｲ) 頂点の座標 $(1,-5)$

(2) $y=2x^2-2x+3$

$y=2(x^2-x)+3=2\{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+3$

$=2(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+3=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}$

$\therefore\ y=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}$

(ｱ) 軸の方程式 $x=\frac{1}{2}$　(ｲ) 頂点の座標 $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$

(3) $y=-2x^2+4x+1$

$y=-2(x^2-2x)+1=-2\{(x-1)^2-1\}+1$

$=-2(x-1)^2+2+1=-2(x-1)^2+3$

$\therefore\ y=-2(x-1)^2+3$

(ｱ) 軸の方程式 $x=1$　(ｲ) 頂点の座標 $(1,3)$

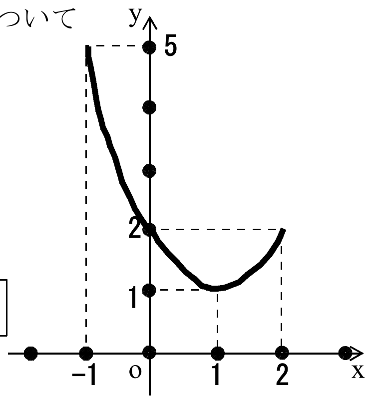
3 関数 $y=x^2-2x+2\ (-1\leqq x\leqq 2)$ について

(1) 変形して、頂点の座標を求めよ。

$y=(x-1)^2-1+2$

$=(x-1)^2+1$　　頂点 $(1,1)$

(2) $-1\leqq x\leqq 2$ の範囲のみ、このグラフをかけ。
（この範囲以外はかかないこと！）



(3) 定義域は $\boxed{-1\leqq x\leqq 2}$　値域は $\boxed{1\leqq y\leqq 5}$

(4) 最大値は　$x=-1$ のとき　5

最小値は　$x=1$ のとき　1

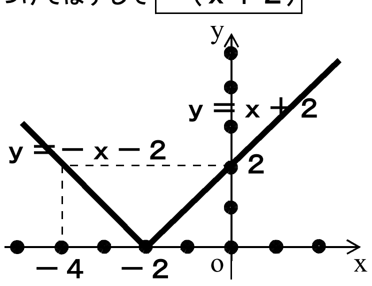
（準備１）例の要領で、次の絶対値をはずせ。

例. $|x-1|=$
- (ｱ) $x-1\geqq 0$ のとき そのままはずして　$x-1$
  $(x\geqq 1)$
- (ｲ) $x-1<0$ のとき −をつけてはずして　$-(x-1)$
  $(x<1)$

$|x+2|=$
- (ｱ) $\boxed{x+2\geqq 0}$ のとき そのままはずして $\boxed{x+2}$
  $(x\geqq -2)$
- (ｲ) $\boxed{x+2<0}$ のとき −をつけてはずして $\boxed{-(x+2)}$
  $(x<-2)$

4 関数 $y=|x+2|$ について、

(1) (準備１)の場合分けを参考にグラフをかけ。



(2) この関数の値域は　$\boxed{0\leqq y}$

(3) 最小値は　$\boxed{x=-2 のとき 0}$

注：このとき、『最大値はなし』である。

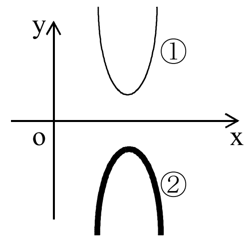
5 ２次関数 $y=x^2-4x+5$ …① について、

(1) ① を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形し、頂点の座標を求めよ。

$y=x^2-4x+5=(x-2)^2-4+5=(x-2)^2+1$　頂点 $(2,1)$

(2) ① のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に −3 だけ平行移動すると、頂点は $(4,-2)$ に移動するので、その方程式は $y=(x-4)^2-2$ である。

(3) ① のグラフを x 軸に関して対称に移動すると、右図 ① が太線 ② のグラフになる。この太線 ② の頂点は $(2,-1)$ であるので、その方程式は $y=-(x-2)^2-1$ である。



6 (1) 頂点の座標が $(1,2)$ で、点 $(-1,6)$ を通る２次関数を求めよ。

頂点 $(1,2)$ より、$y=a(x-1)^2+2$ …① とおける。
① が $(-1,6)$ を通るので、代入すると、$4a+2=6$
$a=1$ を ① に代入して、$y=(x-1)^2+2$

（ヒント　頂点 (1, 2) より $y=a(x-1)^2+2$ の形になることがわかる。）

(2) 軸の方程式が $x=2$ で、２点 $(1,-3)$, $(-1,13)$ を通る２次関数を求めよ。

軸 $x=2$ より、$y=a(x-2)^2+q$ …① とおける。
① が $(1,-3)$, $(-1,13)$ を通るので、代入すると、
$a+q=-3$ …②　$9a+q=13$ …③
②, ③ を解いて、$a=2$，$q=-5$　∴ $y=2(x-2)^2-5$

（ヒント　軸の方程式が $x=2$ より $y=a(x-2)^2+q$ の形になることがわかる。）

7 ２次関数のグラフが３点 $(-1,0)$, $(2,3)$, $(3,-4)$ を通るとき、その２次関数を求めよ。

$y=ax^2+bx+c$ とおいて、
$(-1,0)$ を代入すると、　$a-b+c=0$ …①
$(2,3)$ を代入すると、　$4a+2b+c=3$ …②
$(3,-4)$ を代入すると、　$9a+3b+c=-4$ …③
≪c を消去≫する方針で解くと、②−① より、　$a+b=1$ …④
③−① より、$2a+b=-1$ …⑤
④, ⑤ より、$a=-2$，$b=3$ これらを ① に代入して、$c=5$
∴ $y=-2x^2+3x+5$

（ヒント　$y=a(x-p)^2+q$ とおいて３点を代入すると計算がシンドイ　$y=ax^2+bx+c$ とおいて３点を代入する。）

8 $x=1$ のとき最大値 4 をとり、$x=2$ のとき $y=3$ となる２次関数を求めよ。

 の形で、頂点 $(1,4)$ であるから、
$y=a(x-1)^2+4$ …① とおける。上に 凸 より、$a<0$ …②
① に $(2,3)$ を代入して、$a+4=3$ ∴ $a=-1$（② に適）
$y=-(x-1)^2+4$

9 ２次関数 $y=x^2-4x+a$ について、(ただし、a は定数とする。)

(1) 最小値を求めよ。

$y=x^2-4x+a=(x-2)^2-4+a$
$x=2$ のとき 最小値 $a-4$

(2) (1)で求めた最小値が −3 になるような a の値を求めよ。

$a-4=-3$ を解いて、$a=1$

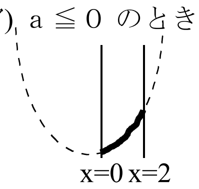
10 関数 $y=3x^2-6ax+2\ (0\leqq x\leqq 2)$ のグラフについて、

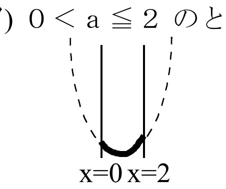
(1) 頂点の座標を求めよ。

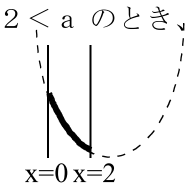
$y=3(x^2-2ax)+2=3\{(x-a)^2-a^2\}+2$
$=3(x-a)^2-3a^2+2$　頂点 $(a, -3a^2+2)$

(2) 次の場合に分けて、$0\leqq x\leqq 2$ における最小値を求めよ。

(ｱ) $a\leqq 0$ のとき　(ｲ) $0<a\leqq 2$ のとき　(ｳ) $2<a$ のとき



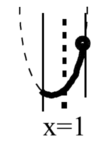


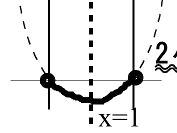


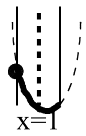
(ｱ) $x=0$ のとき 2　(ｲ) $x=a$ のとき $-3a^2+2$　(ｳ) $x=2$ のとき $14-12a$

(3) 次の場合に分けて、$0\leqq x\leqq 2$ における最大値を求めよ。
（調べる範囲の $x=0$ と $x=2$ の真ん中，$x=1$ の直線がﾎﾟｲﾝﾄ！特別な場合！）

(ｱ) $a<1$ のとき　(ｲ) $a=1$ のとき　(ｳ) $1<a$ のとき





2ヶ所で最大値！


(ｱ) $x=2$ のとき $14-12a$　(ｲ) $x=0$，2 のとき $14-12a=2$　(ｳ) $x=0$ のとき 2

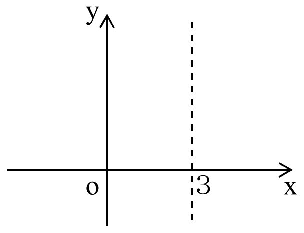
《注意》最大値を求めるだけなら(x 座標を表示しないで)
$a\leqq 1$ のとき $14-12a$，$1<a$ のとき 2　としてもよい。
（なお，等号はどちらにつけてもよい）

1 $y=x^2-4ax+1$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における 最小値・最大値 を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

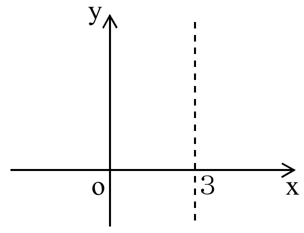
(2) 頂点の x 座標 $x=2a$ が次の各場合、$0 \leqq x \leqq 3$ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最小値を示せ。

(ｱ) $2a \leqq 0$ のとき
すなわち
$a \leqq \square$ のとき



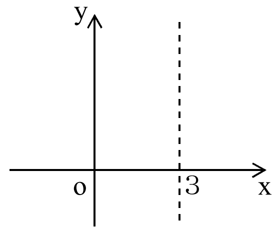
最小値は
$x=\square$ のとき
$\square$

(ｲ) $0<2a \leqq 3$ のとき
すなわち
$\square < a \leqq \square$ のとき



最小値は
$x=\square$ のとき
$\square$

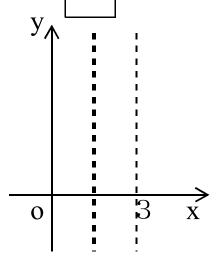
(ｳ) $3<2a$ のとき
すなわち
$\square < a$ のとき



最小値は
$x=\square$ のとき
$\square$

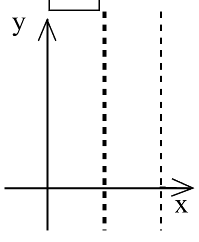
(3) 頂点の x 座標 $x=2a$ が次の各場合、$0 \leqq x \leqq 3$ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最大値を示せ。**特別な場合に注意！**

(ｱ) $2a<\frac{3}{2}$ のとき
即ち
$a<\square$ のとき



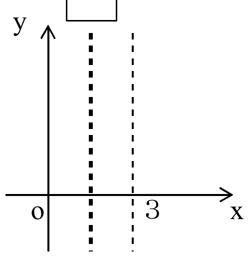
最大値は
$x=\square$ のとき
$\square$

(ｲ) $2a=\frac{3}{2}$ のとき
即ち
$a=\square$ のとき



最大値は
$x=\square, \square$ のとき
$\square$

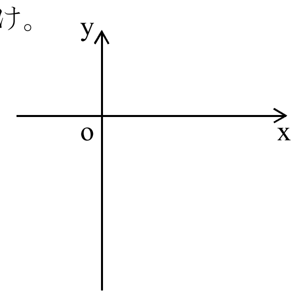
(ｳ) $\frac{3}{2}<2a$ のとき
即ち
$\square < a$ のとき



最大値は
$x=\square$ のとき
$\square$

2 関数 $f(x)=x^2-2x-1$ $(0 \leqq x \leqq a)$ のグラフについて、

(1) $0 \leqq x$ の範囲で、$y=x^2-2x-1$ のグラフをかけ。



(2) $f(0)=-1$ である。他に、$f(x)=-1$ となる x の値を求めよ。（$x^2-2x-1=-1$ を解く。）

(3) 次の a の値の範囲における最大値を求めよ。

(ｱ) $a \leqq 2$ (ｲ) $2<a$

(4) 次の a の値の範囲における最小値を求めよ。

(ｱ) $a \leqq 1$ (ｲ) $1<a$

3 (1) $x=3$ で最小値 4 をとり、$x=5$ で $y=8$ となる２次関数を求めよ。

(2) 軸の方程式が $x=-1$ で、２点 $(1,3)$, $(-2,-3)$ を通る２次関数を求めよ。

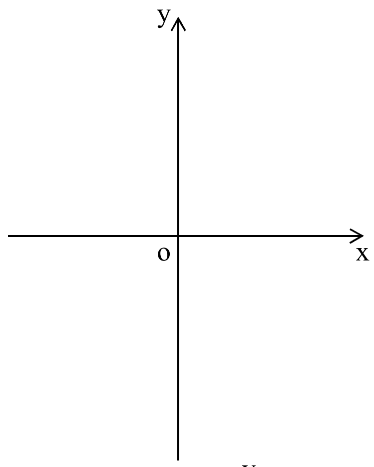
4 ２次関数のグラフが ３点 $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,6)$ を通るとき、その２次関数を求めよ。

5 (1) 次の２次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に表せ。

(ｱ) $y=-2x^2-4x-3$ (ｲ) $y=-2x^2+8x-5$

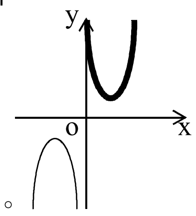
(2) (1) のそれぞれのグラフを右にかき、軸の方程式と頂点の座標を示せ。

(ｱ) のグラフの 軸の方程式 ＿＿＿＿＿＿
頂点の座標 ＿＿＿＿＿＿
(ｲ) のグラフの 軸の方程式 ＿＿＿＿＿＿
頂点の座標 ＿＿＿＿＿＿



(3) (1) について、(ｲ) のグラフは、(ｱ) のグラフを
x 軸方向に $\square$，y 軸方向に $\square$ だけ
平行移動している。

(4) (1)(ｱ) のグラフを原点に関して対称に移動させると右図太線のグラフになる。(1)(ｱ) の頂点 $(-1,-1)$ が原点に関して対称移動より、このときの頂点の座標は
＿＿＿＿＿＿ である。



$y=a(x-p)^2+q$ の形で表せ。
∴ この太線のグラフの方程式は ＿＿＿＿＿＿＿＿ である。

6 x，y は $2x-y=5$ …① を満たしながら変化するとき、x^2+y^2 の最小値を次の手順で求めよ。

(1) ①より $y=2x-5$ として、$Y=x^2+y^2$ に代入し、Y を x だけの式で表せ。

(2) (1) で表した Y の最小値を求めよ。(そのときの x の値と y の値も示せ。)
（x の値を ① に代入。）

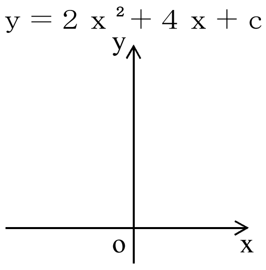
7 m は定数とする。２次関数 $y=x^2+2mx+3m$ の最小値を k とする。

(1) k は m の関数である。k を m の式で表せ。

(2) (1) の k の最大値とそのときの m の値を求めよ。

8 次の関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求めよ。

$y=2x^2+4x+c$ $(-2 \leqq x \leqq 1)$ ⟸ c は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ。



最大値 ＿＿＿＿＿＿
最小値 ＿＿＿＿＿＿

また、この関数の最大値が 7 となるときの定数 c の値を求めよ。

１ $y=x^2-4ax+1$ の $0\leqq x\leqq 3$ における 最小値・最大値 を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

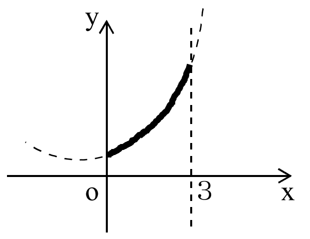
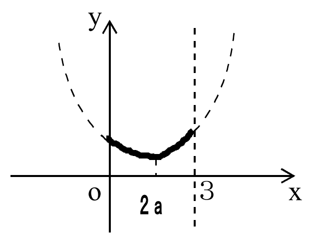
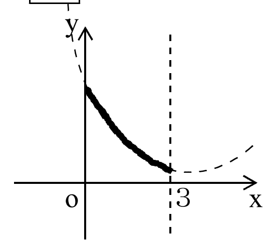
$y=x^2-4ax+1=(x-2a)^2-4a^2+1$　頂点 $(2a,\ -4a^2+1)$

(2) 頂点の x 座標 $x=2a$ が次の各場合、$0\leqq x\leqq 3$ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最小値を示せ。

(ｱ) $2a\leqq 0$ のとき すなわち $a\leqq\boxed{0}$ のとき

(ｲ) $0<2a\leqq 3$ のとき すなわち $\boxed{0}<a\leqq\boxed{\frac{3}{2}}$ のとき

(ｳ) $3<2a$ のとき すなわち $\boxed{\frac{3}{2}}<a$ のとき

最小値は $x=\boxed{0}$ のとき $\boxed{1}$

最小値は $x=\boxed{2a}$ のとき $\boxed{-4a^2+1}$

最小値は $x=\boxed{3}$ のとき $\boxed{10-12a}$

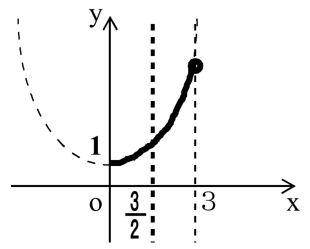
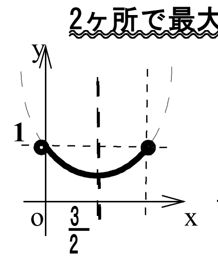
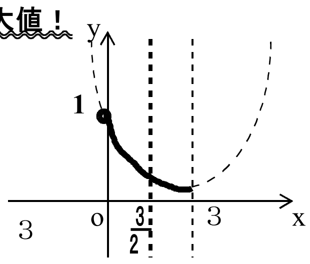
(3) 頂点の x 座標 $x=2a$ が次の各場合、$0\leqq x\leqq 3$ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最大値を示せ。**特別な場合に注意！**

(ｱ) $2a<\frac{3}{2}$ のとき すなわち $a<\boxed{\frac{3}{4}}$ のとき

(ｱ) $2a=\frac{3}{2}$ のとき すなわち $a=\boxed{\frac{3}{4}}$ のとき

(ｲ) $\frac{3}{2}<2a$ のとき すなわち $\boxed{\frac{3}{4}}<a$ のとき

2ヶ所で最大値！

最大値は $x=\boxed{3}$ のとき $\boxed{10-12a}$

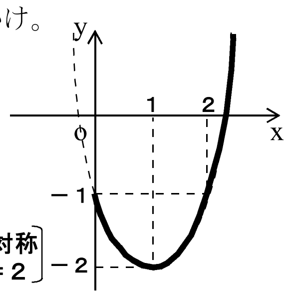
最大値は $x=\boxed{0},\boxed{3}$ のとき $\boxed{1}$

最大値は $x=\boxed{0}$ のとき $\boxed{1}$

２ 関数 $f(x)=x^2-2x-1\ (0\leqq x\leqq a)$ のグラフについて、

(1) $0\leqq x$ の範囲で、$y=x^2-2x-1$ の グラフをかけ。

$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-1-1$
$=(x-1)^2-2$



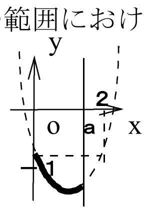
(2) $f(0)=-1$ である。他に、$f(x)=-1$ となる x の値を求めよ。（$x^2-2x-1=-1$ を解く。）

$x^2-2x-1=-1$ を解くと、$x^2-2x=0$

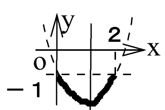
$x=0,\ 2$　∴ $x=2$　［別解］軸 $x=1$ を中心に対称であることより、$x=2$

(3) 次の a の値の範囲における最大値を求めよ。

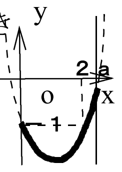
(ｱ) $a<2$ のとき　$x=0$ のとき -1



(ｲ) $a=2$ のとき　$x=0,2$ のとき $a^2-2a-1=-1$



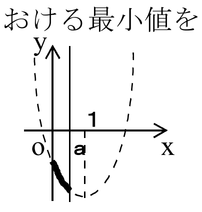
(ｲ) $2<a$ のとき　$x=a$ のとき a^2-2a-1



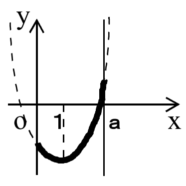
《注意》最大値を求めるだけなら(x座標を表示しないで)
$a\leqq 2$ のとき -1，$2<a$ のとき a^2-2a-1　としてもよい。
（なお，等号はどちらにつけてもよい）

(4) 次の a の値の範囲における最小値を求めよ。

(ｱ) $a\leqq 1$　$x=a$ のとき a^2-2a-1



(ｲ) $1<a$　$x=1$ のとき -2



３ (1) $x=3$ で最小値 4 をとり、$x=5$ で $y=8$ となる２次関数を求めよ。

∪ の形で、頂点 (3, 4) であるから、
$y=a(x-3)^2+4$ …① とおける。下に 凸 より、$a>0$ …②
① に (5, 8) を代入して、$4a+4=8$
∴ $a=1$（② に適）$y=(x-3)^2+4$

(2) 軸の方程式が $x=-1$ で、2点 $(1,3)$, $(-2,-3)$ を通る２次関数を求めよ。

軸 $x=-1$ より、$y=a(x+1)^2+q$ …① とおける。
① が $(1,3)$, $(-2,-3)$ を通るので、代入すると、
$4a+q=3$ …②　$a+q=-3$ …③
②, ③ を解いて、$a=2$, $q=-5$　∴ $y=2(x+1)^2-5$

４ ２次関数のグラフが 3点 $(1,0)$, $(2,1)$, $(3,6)$ を通るとき、その２次関数を求めよ。

$y=ax^2+bx+c$ とおいて、
(1, 0) を代入すると、　$a+b+c=0$ …①
(2, 1) を代入すると、　$4a+2b+c=1$ …②
(3, 6) を代入すると、　$9a+3b+c=6$ …③
≪c を消去≫する方針で解くと、②－① より、$3a+b=1$ …④
③－② より、$5a+b=5$ …⑤
④, ⑤ より、$a=2$, $b=-5$ これらを ① に代入して、$c=3$
∴ $y=2x^2-5x+3$

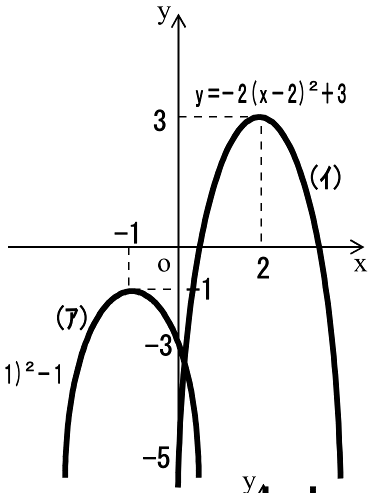
５ (1) 次の２次関数を $y=a(x-p)^2+q$ の形に表せ。

(ｱ) $y=-2x^2-4x-3$
$=-2(x^2+2x)-3$
$=-2\{(x+1)^2-1\}-3$
$=-2(x+1)^2+2-3$
$y=-2(x+1)^2-1$

(ｲ) $y=-2x^2+8x-5$
$=-2(x^2-4x)-5$
$=-2\{(x-2)^2-4\}-5$
$=-2(x-2)^2+8-5$
$y=-2(x-2)^2+3$

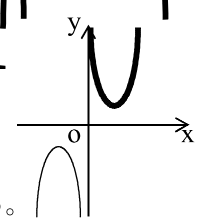
(2) (1) のそれぞれのグラフを右にかき、軸の方程式と頂点の座標を示せ。

(ｱ) のグラフの 軸の方程式　$x=-1$
頂点の座標　$(-1,-1)$
(ｲ) のグラフの 軸の方程式　$x=2$
頂点の座標　$(2,3)$



(3) (1) について、(ｲ) のグラフは、(ｱ) のグラフを x 軸方向に $\boxed{3}$，y 軸方向に $\boxed{4}$ だけ平行移動している。

(4) (1)(ｱ) のグラフを原点に関して対称に移動させると右図太線のグラフになる。(1)(ｱ) の頂点 $(-1,-1)$ が原点に関して対称移動より、このときの頂点の座標は $(1,1)$ である。
∴ この太線のグラフの方程式は $y=2(x-1)^2+1$ である。（$y=a(x-p)^2+q$ の形で表せ。）



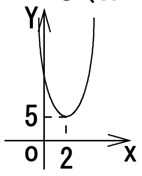
６ x, y は $2x-y=5$ …① を満たしながら変化するとき、x^2+y^2 の最小値を次の手順で求めよ。

(1) ①より $y=2x-5$ として、$Y=x^2+y^2$ に代入し、Y を x だけの式で表せ。

$Y=x^2+y^2=x^2+(2x-5)^2=x^2+4x^2-20x+25$
∴ $Y=5x^2-20x+25$

(2) (1) で表した Y の最小値を求めよ。(そのときの x の値と y の値も示せ。)（x の値を ① に代入。）

$Y=5x^2-20x+25$
$=5(x^2-4x)+25=5\{(x-2)^2-4\}+25$
$=5(x-2)^2+5$

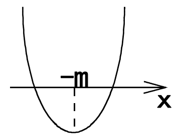


左のグラフより、$x=2$ のとき、最小値 $Y=5$
$x=2$ のとき y の値は、$y=2x-5$ より $y=-1$
$x=2$, $y=-1$ のとき、最小値 $Y=5$

７ m は定数とする。２次関数 $y=x^2+2mx+3m$ の最小値を k とする。

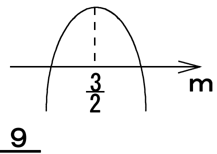
(1) k は m の関数である。k を m の式で表せ。

$y=x^2+2mx+3m=(x+m)^2-m^2+3m$
右のグラフより、$x=-m$ のとき 最小値 $k=-m^2+3m$



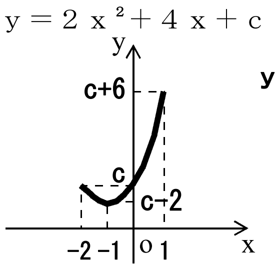
(2) (1) の k の最大値とそのときの m の値を求めよ。

$k=-m^2+3m$ のグラフを考えると、
$k=-(m^2-3m)=-\{(m-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\}$
$=-(m-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$
右の m についてのグラフより、$m=\frac{3}{2}$ のとき 最大値 $\frac{9}{4}$



８ 次の関数のグラフをかいて、最大値・最小値を求めよ。

$y=2x^2+4x+c\ (-2\leqq x\leqq 1)$　⟸ c は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ。



$y=2x^2+4x+c=2(x^2+2x)+c$
$=2\{(x+1)^2-1\}+c$
$=2(x+1)^2-2+c\quad(-2\leqq x\leqq 1)$

最大値　$x=1$ のとき　$c+6$
最小値　$x=-1$ のとき　$c-2$

また、この関数の最大値が 7 となるときの定数 c の値を求めよ。

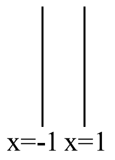
$c+6=7$ を解いて、$c=1$

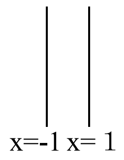
１　$y=x^2-2ax+3$ の区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値をM(a)，最小値を m(a)とする。

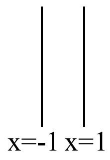
(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 頂点の x 座標 $x=a$ の各場合について、最小値 m(a)を示せ。

(ｱ) $a\leqq$ □ のとき　　(ｲ) □ $<a\leqq$ □ のとき　　(ｳ) □ $<a$ のとき、

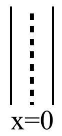


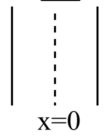


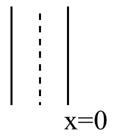


(3) 頂点の x 座標　$x=a$ の各場合について、最大値を示せ。

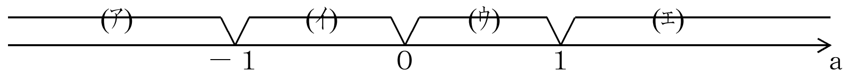
(ｱ) $a<$ □ のとき　　(ｲ) $a=$ □ のとき　　(ｳ) □ $<a$ のとき





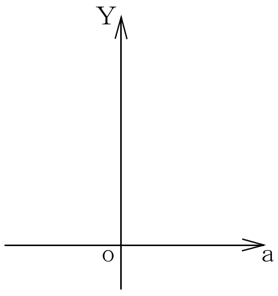


(4) (2) と (3) をもとに、M$(a)-$m(a)の値を次の数直線を用いて求めよ。



(5) M$(a)-$m$(a)=2$ となる a の値を求めよ。

Y＝M$(a)-$m(a) とおいてこのグラフをかいて考えよ。



２　放物線 $y=2x^2-4x+3$ を x 軸方向に -5，y 軸方向に 2 だけ平行移動したときの放物線を次の２通りで求めよ。

【頂点がどこに移動したか】

別解

【x を x+5，y を y−2 に】

ヒント
(頂点がどこに移動するかを考える
別解
x軸方向に −5
⇒ x を x+5 に
y軸方向に 2
⇒ y を y−2 に

３　放物線 $y=2x^2-4x+4$ …① について、

(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) ① のグラフを x 軸に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

ヒント
(その1)　y を −y におきかえる。
(その2)　頂点の座標がどこに移動したかを考える。
(x^2 の係数は、正負が逆になる)

(3) ① のグラフを y 軸に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

(その1)　x を −x におきかえる。
(その2)　頂点の座標がどこに移動したかを考える。
(x^2 の係数は変わらない。)

４　放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動したグラフで、２点$(1,2)$，$(2,3)$を通る２次関数を求めよ。

ヒント
平行移動しても、x^2 の係数だけは変わらない。
$y=x^2+bx+c$ の形

５　$x\geqq 0$ …①，$y\geqq 0$ …②，$2x+y=1$ …③ のとき，x^2+y^2 の最大値，最小値を次の手順で求めよ。

(1) ③ より $y=-2x+1$ を ② に代入して、その不等式と ① より x の値の範囲を求めよ。

(2) $Y=x^2+y^2$ を x のみで表し、(1)の範囲で最大値・最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

６　k は定数とする。２次関数 $y=x^2+2kx-2k$ の最小値を m とする。

(1) m は k の関数である。mを k の式で表せ。

(2) (1)の k の関数 m の最大値とそのときの k の値を求めよ。

７　放物線 $y=x^2+4mx+9$ の頂点が直線 $y=-x+3$ 上にあるとき、定数 m の値を求めよ。

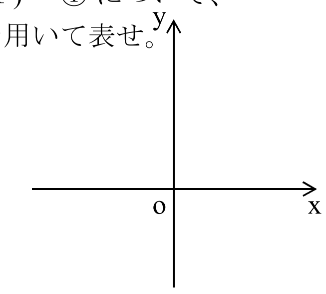
ヒント
頂点を m で表し、
その座標が
$y=-x+3$ を通るように m を求めよ。

８　$y=2x^2+3x$ を平行移動したもので、点$(1,3)$を通り、頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある２次関数を求めよ。

９　$a<0$ とする。関数 $y=ax+b\ (-1\leqq x\leqq 1)$ …① について、

(1) ① のグラフをかいて、最大値・最小値を a，b を用いて表せ。

（ a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ ）



最大値 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

最小値 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) ① の値域が $-3\leqq y\leqq 1$ となるとき、定数 a，b の値を求めよ。

10　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したとき、移動後の放物線は $y=-2x^2+3x-1$ であった。定数 a，b，c の値を求めよ。

逆に、$y=-2x^2+3x-1$ を
x軸方向に □，y軸方向に □ だけ
平行移動すると、
$y=ax^2+bx+c$ になる。

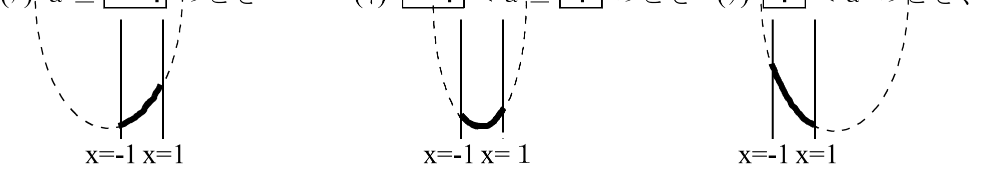
1　$y=x^2-2ax+3$ の区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値をM(a)，最小値を m(a)とする。

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=x^2-2ax+3=(x-a)^2-a^2+3$
$=(x-a)^2-a^2+3$　　頂点 $(a,\ -a^2+3)$

(2) 頂点の x 座標 x＝a の各場合について、最小値 m(a)を示せ。

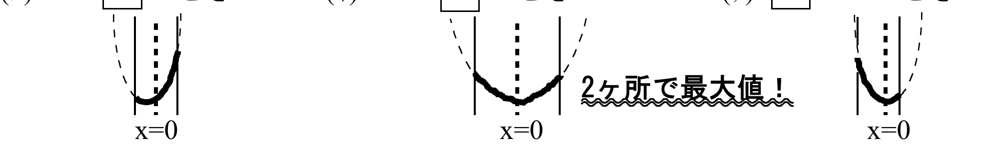
(ｱ) $a\leqq\boxed{-1}$ のとき　(ｲ) $\boxed{-1}<a\leqq\boxed{1}$ のとき　(ｳ) $\boxed{1}<a$ のとき、



x＝－１のとき　$4+2a$　　x＝a のとき　$-a^2+3$　　x＝１のとき　$4-2a$

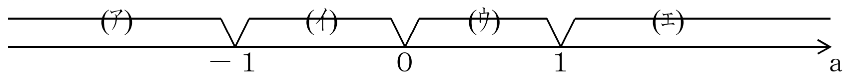
(3) 頂点の x 座標 x＝a の各場合について、最大値を示せ。

(ｱ) $a<\boxed{0}$ のとき　(ｲ) $a=\boxed{0}$ のとき　(ｳ) $\boxed{0}<a$ のとき



x＝１のとき　$4-2a$　　x＝－１，１のとき　$4+2a=4-2a=4$　　x＝－１のとき　$4+2a$

(4) (2)と(3)をもとに、M(a)－m(a)の値を次の数直線を用いて求めよ。



(ｱ) $a\leqq-1$ のとき、　$M(a)-m(a)=(4-2a)-(4+2a)=-4a$

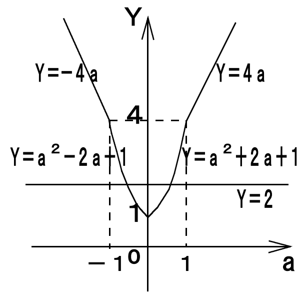
(ｲ) $-1<a\leqq0$ のとき、$M(a)-m(a)=(4-2a)-(-a^2+3)$
$=a^2-2a+1$

(ｳ) $0<a\leqq1$ のとき、　$M(a)-m(a)=(4+2a)-(-a^2+3)$
$=a^2+2a+1$

(ｴ) $1<a$ のとき、　$M(a)-m(a)=(4+2a)-(4-2a)=4a$

(5) M(a)－m(a)＝２ となる a の値を求めよ。
Y＝M(a)－m(a) とおいてこのグラフをかいて考えよ。

(ｱ) $a\leqq-1$ のとき、　$Y=-4a$
(ｲ) $-1<a\leqq0$ のとき、$Y=a^2-2a+1$
(ｳ) $0<a\leqq1$ のとき、　$Y=a^2+2a+1$
(ｴ) $1<a$ のとき、　$Y=4a$



グラフより、
(ｲ) $-1<a\leqq0$ のとき、$Y=a^2-2a+1=2$ となるのは、
$a^2-2a-1=0$ となる小さい方の a より　$a=1-\sqrt{2}$
(ｳ) $0<a\leqq1$ のとき、　$Y=a^2+2a+1=2$ となるのは、
$a^2+2a-1=0$ となる大きい方の a より　$a=-1+\sqrt{2}$
(答) $a=1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

2　放物線 $y=2x^2-4x+3$ を x軸方向に －５，y軸方向に ２ だけ平行移動したときの放物線を次の２通りで求めよ。

【頂点がどこに移動したか】　$y=2x^2-4x+3=2(x^2-2x)+3$
$=2\{(x-1)^2-1\}+3=2(x-1)^2+1$
頂点（1，1）がこの平行移動によって、(－4，3)
∴ $y=2(x+4)^2+3$

ヒント
(頂点がどこに移動するかを考える
別解
x軸方向に －5
⇒ x を x+5 に
y軸方向に 2
⇒ y を y－2 に

別解
【x を x+5，y を y−2 に】　$y=2x^2-4x+3$ の x を x＋５ に y を y－２ にすると、
$y-2=2(x+5)^2-4(x+5)+3$，$y=2x^2+16x+35$

3　放物線　$y=2x^2-4x+4$　…① について、

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=2(x^2-2x)+4=2\{(x-1)^2-1\}+4=2(x-1)^2-2+4$
$=2(x-1)^2+2$　∴ 頂点 (1，2)

(2) ① のグラフを x軸に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

(その1) $y=2x^2-4x+4$ の y を －y にかえて
$-y=2x^2-4x+4$ より $y=-2x^2+4x-4$

(その2) 頂点（1，2）が（1，－2）になり、
x^2 の係数 2 が －2 になるので、$y=-2(x-1)^2-2$

ヒント
(その1)　y を －y におきかえる。
(その2)　頂点の座標がどこに移動したかを考える。
（x^2 の係数は、正負が逆になる）

(3) ① のグラフを y軸に関して対称移動して得られるグラフの方程式を求めよ。

(その1) $y=2x^2-4x+4$ の x を －x にかえて
$y=2(-x)^2-4(-x)+4$　これを整理して、
$y=2x^2+4x+4$

(その2) 頂点（1，2）が（－1，2）になり、
x^2 の係数 2 は、そのままなので、$y=2(x+1)^2+2$

ヒント
(その1)　x を －x におきかえる。
(その2)　頂点の座標がどこに移動したかを考える。
（x^2 の係数は変わらない。）

4　放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動したグラフで、２点(1，2)，(2，3)を通る２次関数を求めよ。

$y=x^2-3x$ を平行移動しても x^2 の係数は同じであるから、求める２次関数のグラフは、
$y=x^2+bx+c$ …①とおける

ヒント
平行移動しても、x^2 の係数だけは変わらない。
$y=x^2+bx+c$ の形

①に、２点（1，2），(2，3) を代入して、
$1+b+c=2$　⇒　$b+c=1$　…②
$4+2b+c=3$ ⇒ $2b+c=-1$ …③
②,③ を解いて、$b=-2$，$c=3$　∴ $y=x^2-2x+3$

5　$x\geqq0$ …①，$y\geqq0$ …②，$2x+y=1$ …③ のとき、x^2+y^2 の最大値，最小値を次の手順で求めよ。

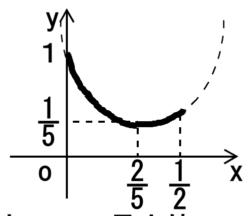
(1) ③ より $y=-2x+1$ を ② に代入して、その不等式と ① より x の値の範囲を求めよ。

$y=-2x+1\geqq0$ また、$x\geqq0$ の条件から　$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ …④

(2) $Y=x^2+y^2$ を x のみで表し、(1)の範囲で最大値・最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

$Y=x^2+y^2$ とおいて、$y=-2x+1$ を代入すると、
$Y=x^2+(-2x+1)^2=5x^2-4x+1=5(x^2-\frac{4}{5}x)+1$
$=5\{(x-\frac{2}{5})^2-\frac{4}{25}\}+1=5(x-\frac{2}{5})^2-\frac{4}{5}+1$
∴ $Y=5(x-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}$ …⑤

④ の範囲で、⑤ の最大値・最小値を考えると
右のグラフより、$x=0$ のとき、最大値 1
$x=\frac{2}{5}$ のとき、最小値 $\frac{1}{5}$



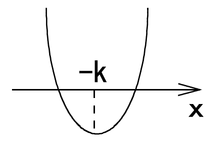
$x=0$ を $2x+y=1$ に代入して　$y=1$
$x=\frac{2}{5}$ を $2x+y=1$ に代入して　$y=\frac{1}{5}$

(答) $x=0$，$y=1$ のとき、　最大値 1
$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ のとき、最小値 $\frac{1}{5}$

6　k は定数とする。２次関数 $y=x^2+2kx-2k$ の最小値を m とする。

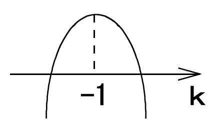
(1) m は k の関数である。m を k の式で表せ。

$y=x^2+2kx-2k=(x+k)^2-k^2-2k$
右のグラフより、
$x=-k$ のとき 最小値 $m=-k^2-2k$



(2) (1)の k の関数 m の最大値とそのときの k の値を求めよ。

$m=-k^2-2k$ のグラフを考えると、
$m=-(k^2+2k)=-\{(k+1)^2-1\}$
∴ $m=-(k+1)^2+1$



右の k についてのグラフより、$k=-1$ のとき 最大値 1

7　放物線 $y=x^2+4mx+9$ の頂点が直線 $y=-x+3$ 上にあるとき、定数 m の値を求めよ。

$y=(x+2m)^2-4m^2+9$ より、
頂点$(-2m,\ -4m^2+9)$ が $y=-x+3$ 上にあるので、代入して、
$-4m^2+9=-(-2m)+3$，$4m^2+2m-6=0$
$2m^2+m-3=0$，$(2m+3)(m-1)=0$
$m=-\frac{3}{2}$，1

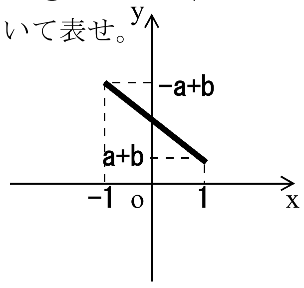
ヒント
頂点を m で表し、その座標が
y=−x+3 を通るように m を求めよ。

8　$y=2x^2+3x$ を平行移動したもので、点(1，3)を通り、頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある２次関数を求めよ。

頂点の x座標を p とおくと、頂点は $(p,\ 2p-3)$ とおける。
$y=2x^2+3x$ を平行移動しても x^2 の係数は同じ 2 であるから、
求める２次関数は、$y=2(x-p)^2+2p-3$ …① とおける。
① が 点(1，3) を通るから、代入して、$3=2(1-p)^2+2p-3$
$2p^2-2p-4=0$，$2(p+1)(p-2)=0$，$p=-1$，2
$p=-1$ を ① に代入して、$y=2(x+1)^2-5$
$p=2$ を ① に代入して、　$y=2(x-2)^2+1$

9　$a<0$ とする。関数 $y=ax+b$ $(-1\leqq x\leqq1)$ …① について、

(1) ①のグラフをかいて、最大値・最小値を a，b を用いて表せ。
（ a は適当な数と考えて、とりあえずグラフをかけ ）



最大値　$x=-1$ のとき $-a+b$
最小値　$x=1$ のとき $a+b$

(2) ①の値域が $-3\leqq y\leqq1$ となるとき、定数 a，b の値を求めよ。

(1) より、$-a+b=1$
$a+b=-3$
これらを解いて、$a=-2$，$b=-1$
$a<0$ の条件を満たすので、適している。

10　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x軸方向に 1，y軸方向に －2 だけ平行移動したとき、移動後の放物線は $y=-2x^2+3x-1$ であった。定数 a，b，c の値を求めよ。

$y=-2(x^2-\frac{3}{2}x)-1$
$=-2\{(x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}\}-1$
$=-2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{1}{8}$

逆に、$y=-2x^2+3x-1$ を x軸方向に □，y軸方向に □ だけ平行移動すると、$y=ax^2+bx+c$ になる。

x軸方向に 1，y軸方向に －2 だけ平行移動して、頂点が $(\frac{3}{4},\ \frac{1}{8})$
$(\frac{3}{4},\ \frac{1}{8})$ を y軸方向に 2，x軸方向に －1 だけ平行移動すると、
$(-\frac{1}{4},\ \frac{17}{8})$ になる。∴ $y=-2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{17}{8}=-2x^2-x+2$
これが $y=ax^2+bx+c$ と一致するので、$a=-2$，$b=-1$，$c=2$

別解：$y=ax^2+bx+c$ の x を x－1，y を y＋2 にして、
$y+2=a(x-1)^2+b(x-1)+c$，$y=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c-2)$
これが $y=-2x^2+3x-1$ と一致するので、$a=-2$ …①，$-2a+b=3$ …②
$a-b+c-2=-1$ …③　①,②,③ を解いて、$a=-2$，$b=-1$，$c=2$

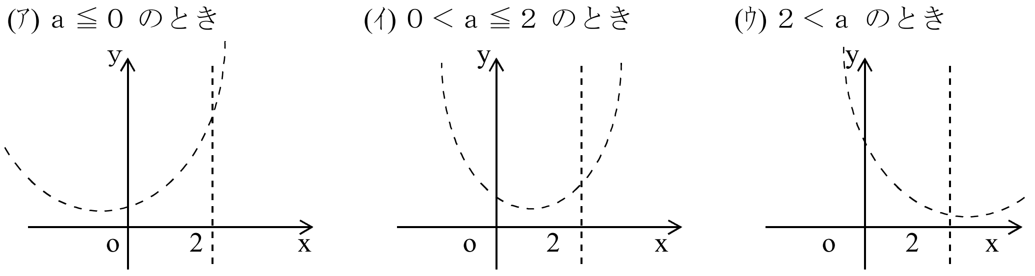
最大・最小の３通りの場合分けに慣れよう！

（準備１）ｙ＝ｘ²－２ａｘ＋１ の区間 ０≦ｘ≦２ における最小値を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 頂点の ｘ 座標 ｘ＝ａ が次の各場合、０≦ｘ≦２ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最小値を示せ。

(ｱ) ａ≦０ のとき　　(ｲ) ０＜ａ≦２ のとき　　(ｳ) ２＜ａ のとき



最小値は　ｘ＝□ のとき □　　最小値は　ｘ＝□ のとき □　　最小値は　ｘ＝□ のとき □

（準備２）ｙ＝ｘ²－４ａｘ＋１ の区間 ０≦ｘ≦３ における最小値を考えよう。

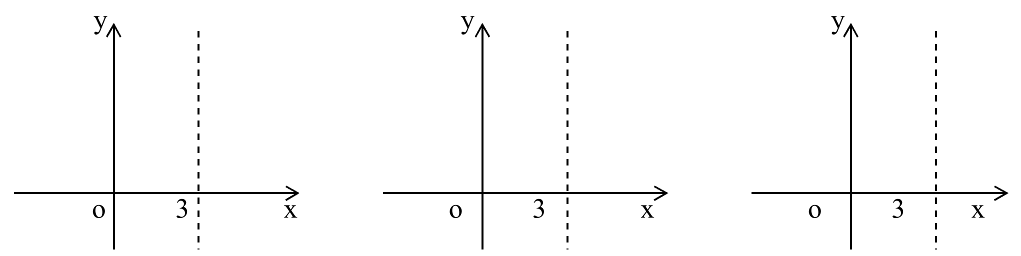
(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 頂点の ｘ 座標 ｘ＝２ａ が次の各場合、０≦ｘ≦３ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最小値を示せ。

(ｱ) ２ａ≦０ のとき　即ち　ａ≦□ のとき

(ｲ) ０＜２ａ≦３ のとき　即ち　□＜ａ≦□ のとき

(ｳ) ３＜２ａ のとき　即ち　□＜ａ のとき

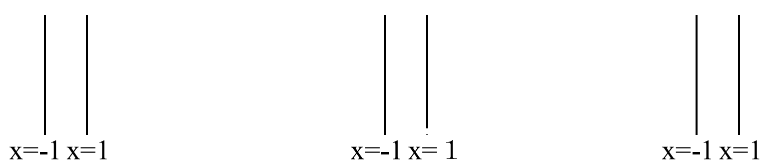


最小値は　ｘ＝□ のとき □　　最小値は　ｘ＝□ のとき □　　最小値は　ｘ＝□ のとき □

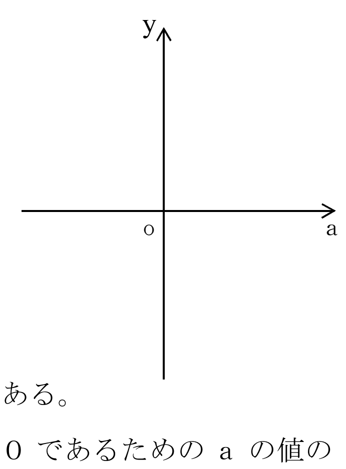
問１．ｙ＝ｘ²－２ａｘ＋３ の区間－１≦ｘ≦１ における最小値を ｍ(ａ) とする。

(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 頂点の ｘ 座標 ｘ＝ａ の各場合について、最小値 ｍ(ａ) を示せ。



(3) ｙ＝ｍ(ａ) のグラフをかけ。



(4) ｙ＝ｍ(ａ) の最大値は ａ＝□ のとき □ である。

(5) －１≦ｘ≦１ において、常に ｘ²－２ａｘ＋３≧０ であるための ａ の値の範囲は □≦ａ≦□ である。

【考え方】－１≦ｘ≦１ において、最小値≧０ となる ａ の値であれば、この ａ のとき、－１≦ｘ≦１ においては、常に ｘ²－２ａｘ＋３≧０ である。

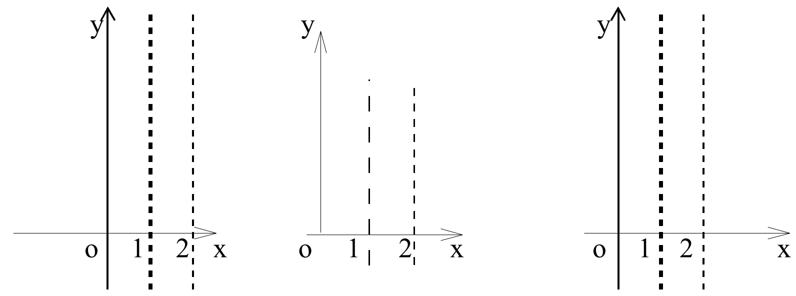
最大・最小の２通りの場合分けに慣れよう！特別な場合に注意！

（準備３）ｙ＝ｘ²－２ａｘ＋１ の区間 ０≦ｘ≦２ における最大値を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 頂点の ｘ 座標 ｘ＝ａ が次の各場合、０≦ｘ≦２ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最大値を示せ。

(ｱ) ａ≦１ のとき　　(ｲ) ａ＝１ のとき　　(ｳ) １＜ａ のとき



最大値は　ｘ＝□ のとき □　　最大値は　ｘ＝□，□ のとき □　　最大値は　ｘ＝□ のとき □

（準備４）ｙ＝ｘ²－４ａｘ＋１ の区間 ０≦ｘ≦３ における最大値を考えよう。

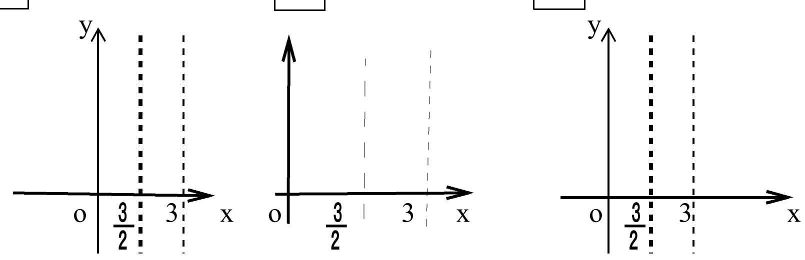
(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 頂点の ｘ 座標 ｘ＝２ａ が次の各場合、０≦ｘ≦３ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最大値を示せ。

(ｱ) ２ａ＜$\frac{3}{2}$ のとき　即ち　ａ＜□ のとき

(ｲ) ２ａ＝$\frac{3}{2}$ のとき　即ち　ａ＝□ のとき

(ｳ) $\frac{3}{2}$＜２ａ のとき　即ち　□＜ａ のとき



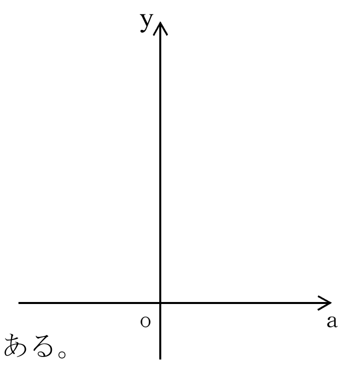
最大値は　ｘ＝□ のとき □　　最大値は　ｘ＝□，□ のとき □　　最大値は　ｘ＝□ のとき □

問２．ｙ＝ｘ²－２ａｘ＋３ の区間－１≦ｘ≦１ における最大値を Ｍ(ａ) とする。

(1) 頂点の座標を求めよ。

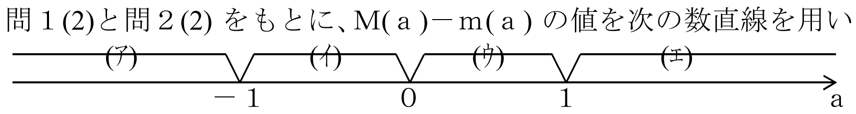
(2) 頂点の ｘ 座標　ｘ＝ａ の各場合について、最大値 Ｍ(ａ) を示せ。

(3) ｙ＝Ｍ(ａ) のグラフをかけ。



(4) ｙ＝Ｍ(ａ) の最小値は ａ＝□ のとき □ である。

(5) 問１(2)と問２(2) をもとに、Ｍ(ａ)－ｍ(ａ) の値を次の数直線を用いて求めよ。



(ｱ) ａ≦－１ のとき、

(ｲ) －１＜ａ≦０ のとき、

(ｳ) ０＜ａ≦１ のとき、

(ｴ) １＜ａ のとき、

最大・最小の３通りの場合分けに慣れよう！

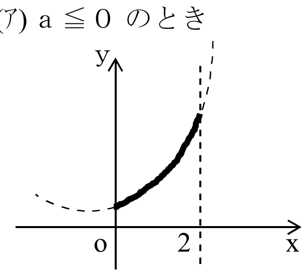
（準備１）$y=x^2-2ax+1$ の区間 $0\leqq x\leqq 2$ における最小値を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$　　頂点 $(a,\ -a^2+1)$

(2) 頂点の x 座標 $x=a$ が次の各場合、$0\leqq x\leqq 2$ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最小値を示せ。

(ｱ) $a\leqq 0$ のとき

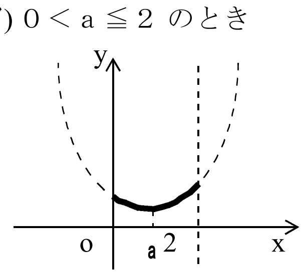


最小値は

$x=\boxed{0}$ のとき

$\boxed{1}$

(ｲ) $0<a\leqq 2$ のとき

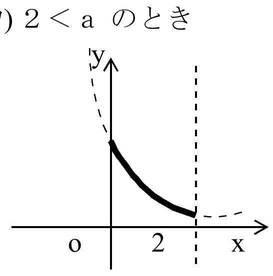


最小値は

$x=\boxed{a}$ のとき

$\boxed{-a^2+1}$

(ｳ) $2<a$ のとき



最小値は

$x=\boxed{2}$ のとき

$\boxed{-4a+5}$

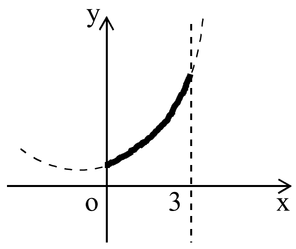
（準備２）$y=x^2-4ax+1$ の区間 $0\leqq x\leqq 3$ における最小値を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=x^2-4ax+1=(x-2a)^2-4a^2+1$　　頂点 $(2a,\ -4a^2+1)$

(2) 頂点の x 座標 $x=2a$ が次の各場合、$0\leqq x\leqq 3$ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最小値を示せ。

(ｱ) $2a\leqq 0$ のとき
即ち
$a\leqq\boxed{0}$ のとき

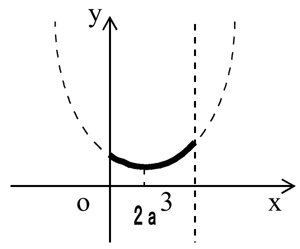


最小値は

$x=\boxed{0}$ のとき

$\boxed{1}$

(ｲ) $0<2a\leqq 3$ のとき
即ち
$\boxed{0}<a\leqq\boxed{\frac{3}{2}}$ のとき

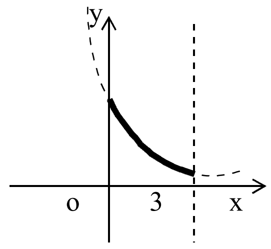


最小値は

$x=\boxed{2a}$ のとき

$\boxed{-4a^2+1}$

(ｳ) $3<2a$ のとき
即ち
$\boxed{\frac{3}{2}}<a$ のとき



最小値は

$x=\boxed{3}$ のとき

$\boxed{10-12a}$

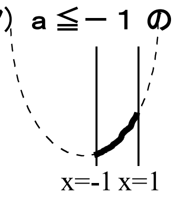
問１．$y=x^2-2ax+3$ の区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における最小値を $m(a)$ とする。

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=x^2-2ax+3=(x-a)^2-a^2+3$
$=(x-a)^2-a^2+3$　　頂点 $(a,\ -a^2+3)$

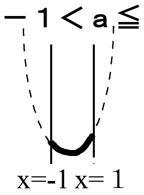
(2) 頂点の x 座標 $x=a$ の各場合について、最小値 $m(a)$ を示せ。

(ｱ) $a\leqq -1$ のとき



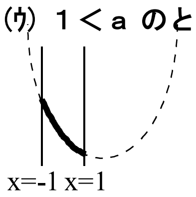
$x=-1$ のとき
$4+2a$

(ｲ) $-1<a\leqq 1$ のとき



$x=a$ のとき
$-a^2+3$

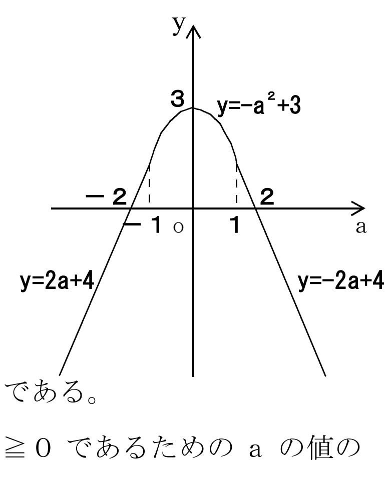
(ｳ) $1<a$ のとき、



$x=1$ のとき
$4-2a$

(3) $y=m(a)$ のグラフをかけ。

$$y=m(a)=\begin{cases} a\leqq -1 \text{ のとき、} & 4+2a \\ -1<a\leqq 1 \text{ のとき、} & -a^2+3 \\ 1<a \text{ のとき、} & 4-2a \end{cases}$$



(4) $y=m(a)$ の最大値は $a=\boxed{0}$ のとき $\boxed{3}$ である。

(5) $-1\leqq x\leqq 1$ において、常に $x^2-2ax+3\geqq 0$ であるための a の値の範囲は $\boxed{-2}\leqq a\leqq\boxed{2}$ である。

【考え方】$-1\leqq x\leqq 1$ において、最小値$\geqq 0$ となる a の値であれば、この a のとき、$-1\leqq x\leqq 1$ においては、常に $x^2-2ax+3\geqq 0$ である。

最大・最小の２通りの場合分けに慣れよう！特別な場合に注意！

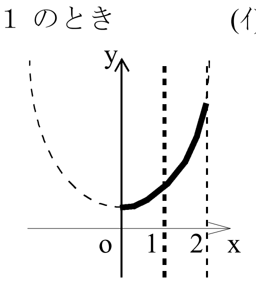
（準備３）$y=x^2-2ax+1$ の区間 $0\leqq x\leqq 2$ における最大値を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$　　頂点 $(a,\ -a^2+1)$

(2) 頂点の x 座標 $x=a$ が次の各場合、$0\leqq x\leqq 2$ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最大値を示せ。

(ｱ) $a\leqq 1$ のとき

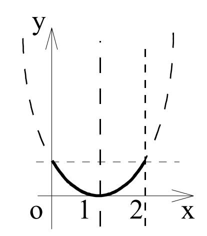


最大値は

$x=\boxed{2}$ のとき

$\boxed{-4a+5}$

(ｲ) $a=1$ のとき

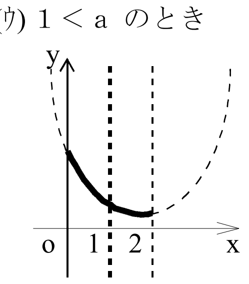


最大値は

$x=\boxed{0}$，$\boxed{2}$ のとき

$\boxed{-4a+5=1}$

(ｳ) $1<a$ のとき



最大値は

$x=\boxed{0}$ のとき

$\boxed{1}$

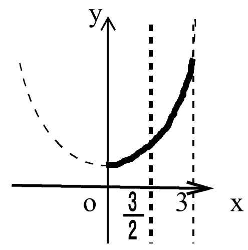
（準備４）$y=x^2-4ax+1$ の区間 $0\leqq x\leqq 3$ における最大値を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=x^2-4ax+1=(x-2a)^2-4a^2+1$　　頂点 $(2a,\ -4a^2+1)$

(2) 頂点の x 座標 $x=2a$ が次の各場合、$0\leqq x\leqq 3$ の部分のみ放物線を実線でかき、そのときの最大値を示せ。

(ｱ) $2a<\frac{3}{2}$ のとき
即ち
$a<\boxed{\frac{3}{4}}$ のとき

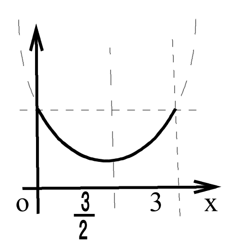


最大値は

$x=\boxed{3}$ のとき

$\boxed{10-12a}$

(ｲ) $2a=\frac{3}{2}$ のとき
即ち
$a=\boxed{\frac{3}{4}}$ のとき

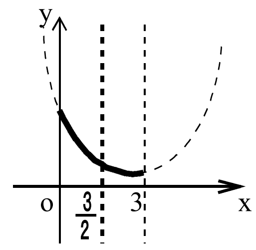


最大値は

$x=\boxed{0}$，$\boxed{3}$ のとき

$\boxed{10-12a=1}$

(ｳ) $\frac{3}{2}<2a$ のとき
即ち
$\boxed{\frac{3}{4}}<a$ のとき



最大値は

$x=\boxed{0}$ のとき

$\boxed{1}$

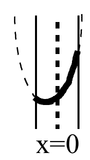
問２．$y=x^2-2ax+3$ の区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=x^2-2ax+3=(x-a)^2-a^2+3$
$=(x-a)^2-a^2+3$　　頂点 $(a,\ -a^2+3)$

(2) 頂点の x 座標 $x=a$ の各場合について、最大値 $M(a)$ を示せ。

(ｱ) $a\leqq 0$ のとき

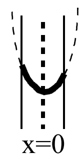


$x=1$ のとき
$4-2a$

特別な場合！

ただし、$a=0$ のときは
$x=-1,\ 1$ のとき、
$4+2a=4-2a=4$

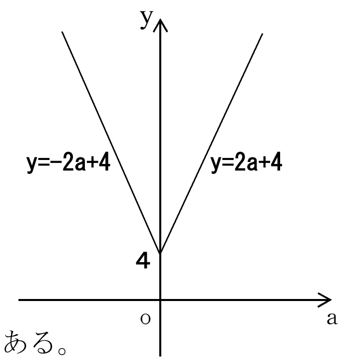
(ｲ) $0<a$ のとき



$x=-1$ のとき
$4+2a$

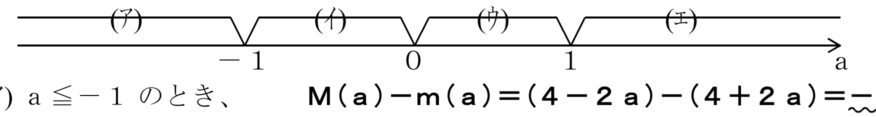
(3) $y=M(a)$ のグラフをかけ。

$$y=M(a)=\begin{cases} a\leqq 0 \text{ のとき、} & 4-2a \\ 0<a \text{ のとき、} & 4+2a \end{cases}$$



(4) $y=M(a)$ の最小値は $a=\boxed{0}$ のとき $\boxed{4}$ である。

(5) 問１(2)と問２(2) をもとに、$M(a)-m(a)$ の値を次の数直線を用いて求めよ。



(ｱ) $a\leqq -1$ のとき、　**$M(a)-m(a)=(4-2a)-(4+2a)=-4a$**

(ｲ) $-1<a\leqq 0$ のとき、　**$M(a)-m(a)=(4-2a)-(-a^2+3)$**
$=a^2-2a+1$

(ｳ) $0<a\leqq 1$ のとき、　**$M(a)-m(a)=(4+2a)-(-a^2+3)$**
$=a^2+2a+1$

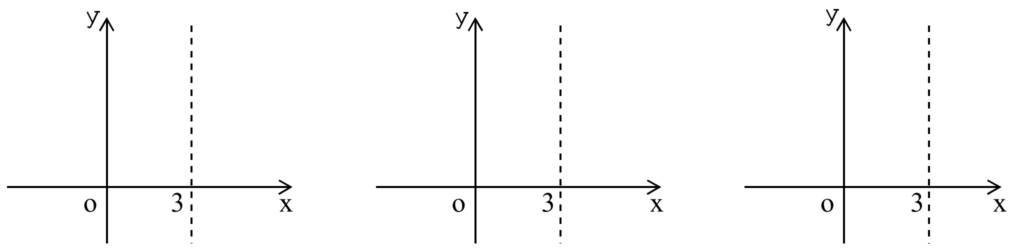
(ｴ) $1<a$ のとき、　**$M(a)-m(a)=(4+2a)-(4-2a)=4a$**

最大・最小の３通りの場合分けに慣れよう！特別な場合に注意！

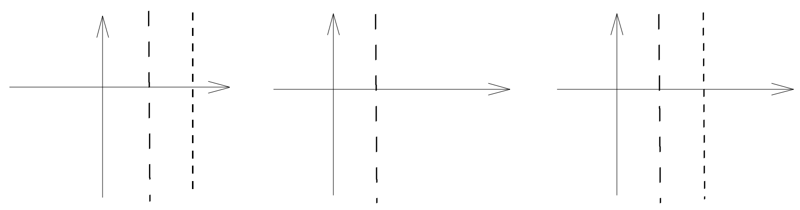
問３．ｙ＝－ｘ²＋４ａｘ＋１ の区間 ０≦ｘ≦３ における最小値・最大値を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

(2) 最大値を調べよ。



(3) 最小値を調べよ。



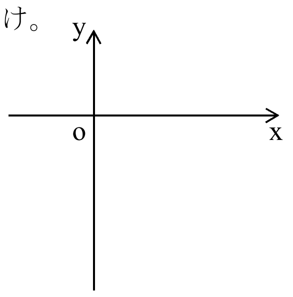
最大が３通りなら最小は２通り、最大が２通りなら最小は３通りである！

《特別な場合に注意！》

調べる区間が変わるときの最大・最小の場合分けにも慣れよう！

問４．関数 ｆ(ｘ)＝ｘ²－２ｘ－１（０≦ｘ≦ａ）のグラフについて、

(1) ０≦ｘ の範囲で、ｙ＝ｘ²－２ｘ－１ の グラフをかけ。



(2) ｆ(０)＝－１ である。他に、ｆ(ｘ)＝－１ となるｘ の値を求めよ。（ｘ²－２ｘ－１＝－１ を解く。）

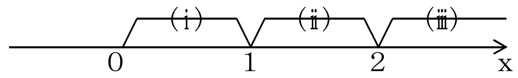
(3) 次の ａ の値の範囲における最大値を求めよ。

(ｱ) ａ≦２　　　(ｲ) ２＜ａ

(4) 次の ａ の値の範囲における最小値を求めよ。

(ｱ) ａ≦１　　　(ｲ) １＜ａ

(5) (3)(4) で求めた最大値・最小値を次のように数直線を用いて場合分けせよ。



問５．ｆ(ｘ)＝ｘ²－２ｘ＋２ の ｔ≦ｘ≦ｔ＋２ における 最小値・最大値を次の手順で求めよ。

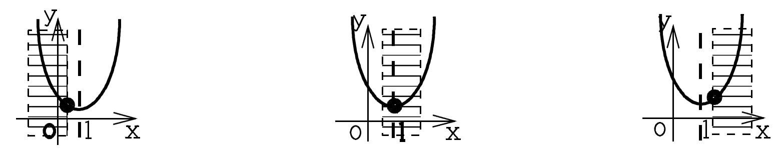
(1) ｙ＝ｆ(ｘ) のグラフの頂点のｘ座標を求めよ。

ｘ＝ｔ，ｔ＋２ の真ん中

ｆ(ｘ)＝(ｘ－１)²＋１ とし、軸 ｘ＝１ と ｔ，ｔ＋２，$\frac{t+(t+2)}{2}$ の比較

(2) 最小値を次の場合に分けて求めよ。

(ｱ) ｔ+２≦頂点のｘ座標 のとき　　(ｲ) ｔ≦頂点のｘ座標＜ｔ+２ のとき　　(ｳ) 頂点のｘ座標＜ｔのとき



(3) 最大値を次の場合に分けて求めよ。

(ｱ) ｔ+１≦頂点のｘ座標 のとき　　(ｲ) 頂点のｘ座標＜ｔ+１ のとき

(4) (2)(3) で求めた ｍ，Ｍ について、Ｍ－ｍ の最小値を求めよ。

【演 習】

$\boxed{\text{演１}}$ 定義域が ｐ－１≦ｘ≦ｐ＋１ の関数 ｆ(ｘ)＝ｘ²－４ｘ＋ｐ＋１ について

(1) (ⅰ) ｆ(ｘ)の最小値を ｍ(ｐ)とおくと、
ｐ≦$\boxed{ア}$ のとき、ｍ(ｐ)＝ｐ²－ｐ－$\boxed{イ}$，$\boxed{ア}$＜ｐ≦$\boxed{ウ}$ のとき、ｍ(ｐ)＝ｐ－$\boxed{エ}$
$\boxed{ウ}$＜ｐ のとき、ｍ(ｐ)＝ｐ²－$\boxed{オ}$ｐ＋$\boxed{カ}$

(ⅱ) ｐ－１≦ｘ≦ｐ＋１ の範囲で、つねに ｘ²－４ｘ＋ｐ＋１≧０ が成り立つとき ｐ の値の範囲は ｐ≦$\boxed{キク}$，$\boxed{ケ}$≦ｐ である。

(2) ｆ(ｘ)の最大値を Ｍ(ｐ)とおくと、ｐ≦$\boxed{コ}$ のとき、Ｍ(ｐ)＝ｐ²－$\boxed{サ}$ｐ＋$\boxed{シ}$
$\boxed{コ}$＜ｐ のとき、Ｍ(ｐ)＝ｐ²－ｐ－$\boxed{ス}$

(3) (1)の ｍ(ｐ)，(2)の Ｍ(ｐ)について、Ｍ(ｐ)－ｍ(ｐ)の値がもっとも小さくなるのは、ｐ＝$\boxed{セ}$ のときで、その値は $\boxed{ソ}$ である。

最大・最小の３通りの場合分けに慣れよう！特別な場合に注意！

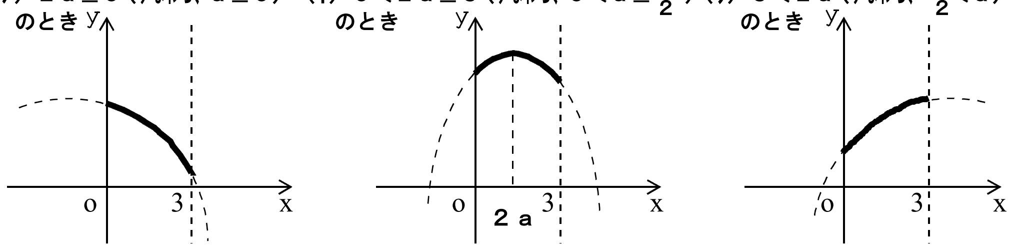
問３．$y=-x^2+4ax+1$ の区間 $0\leqq x\leqq 3$ における最小値・最大値を考えよう。

(1) 頂点の座標を求めよ。

$y=-x^2+4ax+1=-(x^2-4ax)+1=-\{(x-2a)^2-4a^2\}+1$
$=-(x-2a)^2+4a^2+1$　　頂点 $(2a,\ 4a^2+1)$

(2) 最大値を調べよ。

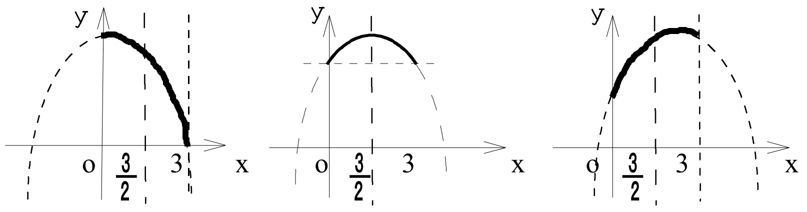
(ｱ) $2a\leqq 0$（すなわち、$a\leqq 0$）のとき　(ｲ) $0<2a\leqq 3$（すなわち、$0<a\leqq\frac{3}{2}$）のとき　(ｳ) $3<2a$（すなわち、$\frac{3}{2}<a$）のとき



最大値は $x=0$ のとき 1　　最大値は $x=2a$ のとき $4a^2+1$　　最大値は $x=3$ のとき $12a-8$

(3) 最小値を調べよ。

(ｱ) $2a<\frac{3}{2}$（すなわち、$a<\frac{3}{4}$）のとき　(ｲ) $2a=\frac{3}{2}$（すなわち、$a=\frac{3}{4}$）のとき　(ｳ) $\frac{3}{2}<2a$（すなわち、$\frac{3}{4}<a$）のとき



最小値は $x=3$ のとき $12a-8$　　最小値は $x=0,\ 3$ のとき $12a-8=1$　　最小値は $x=0$ のとき 1

最大が３通りなら最小は２通り、最大が２通りなら最小は３通りである！

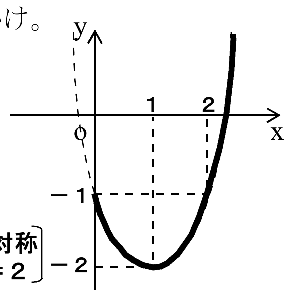
《特別な場合に注意！》

調べる区間が変わるときの最大・最小の場合分けにも慣れよう！

問４．関数 $f(x)=x^2-2x-1\ (0\leqq x\leqq a)$ のグラフについて、

(1) $0\leqq x$ の範囲で、$y=x^2-2x-1$ の グラフをかけ。

$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-1-1$
$=(x-1)^2-2$

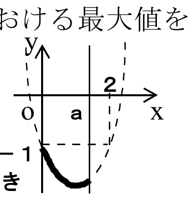


(2) $f(0)=-1$ である。他に、$f(x)=-1$ となる x の値を求めよ。（$x^2-2x-1=-1$ を解く。）

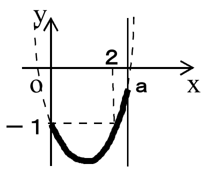
$x^2-2x-1=-1$ を解くと、$x^2-2x=0$
$x=0,\ 2$　∴ $x=2$　　$\boxed{別解}$ 軸 $x=1$ を中心に対称であることより、$x=2$

(3) 次の a の値の範囲における最大値を求めよ。

(ｱ) $a\leqq 2$　$x=0$ のとき -1
ただし、$a=2$ のときは $x=0,\ 2$ のとき

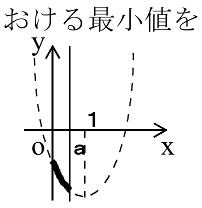


(ｲ) $2<a$　$x=a$ のとき a^2-2a-1

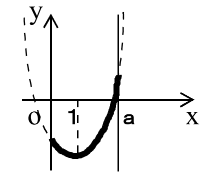


(4) 次の a の値の範囲における最小値を求めよ。

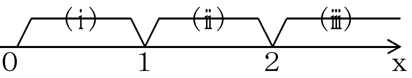
(ｱ) $a\leqq 1$　$x=a$ のとき a^2-2a-1



(ｲ) $1<a$　$x=1$ のとき -2



(5) (3)(4) で求めた最大値・最小値を次のように数直線を用いて場合分けせよ。



(ⅰ) $0<a<1$ のとき、　最大値は、(3)(ｱ)より $x=0$ のとき、-1
　最小値は、(4)(ｱ)より $x=a$ のとき、a^2-2a-1

(ⅱ) $1\leqq a<2$ のとき、　最大値は、(3)(ｱ)より $x=0$ のとき、-1
　最小値は、(4)(ｲ)より $x=1$ のとき、-2

(ⅱ)′ $a=2$ のとき、　最大値は、(3)(ｱ)より $x=0,\ 2$ のとき、-1
　最小値は、(4)(ｲ)より $x=1$ のとき、-2

(ⅲ) $2<a$ のとき、　最大値は、(3)(ｲ)より $x=a$ のとき、a^2-2a-1
　最小値は、(4)(ｲ)より $x=1$ のとき、-2

問５．$f(x)=x^2-2x+2$ の $t\leqq x\leqq t+2$ における 最小値・最大値を次の手順で求めよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの頂点の x 座標を求めよ。

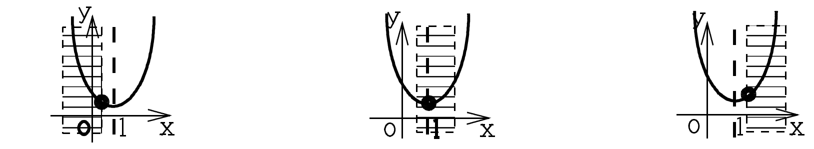
$f(x)=(x-1)^2+1$ より $x=1$

$x=t,\ t+2$ の真ん中

$\boxed{f(x)=(x-1)^2+1\ とし、軸\ x=1\ と\ t,\ t+2,\ \frac{t+(t+2)}{2}\ の比較}$

(2) 最小値を次の場合に分けて求めよ。

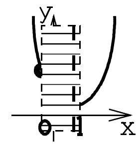
(ｱ) $t+2\leqq$頂点のx座標 のとき　(ｲ) $t\leqq$頂点のx座標$<t+2$ のとき　(ｳ) 頂点のx座標$<t$のとき



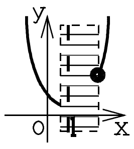
(ｱ) $t+2\leqq 1$ のとき（$t\leqq -1$）　$f(t+2)=t^2+2t+2$
(ｲ) $t\leqq 1<t+2$ のとき（$-1<t\leqq 1$）　$f(1)=1$
(ｳ) $1<t$ のとき　$f(t)=t^2-2t+2$

(3) 最大値を次の場合に分けて求めよ。

(ｱ) $t+1\leqq$頂点のx座標 のとき　(ｲ) 頂点のx座標$<t+1$ のとき

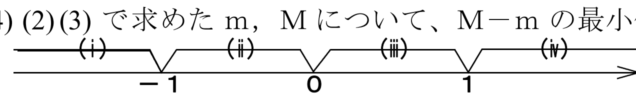


(ｱ) $t+1\leqq 1$ のとき（$t\leqq 0$）　$f(t)=t^2-2t+2$



(ｲ) $1<t+1$ のとき（$0<t$）　$f(t+2)=t^2+2t+2$

(4) (2)(3) で求めた m，M について、M－m の最小値を求めよ。

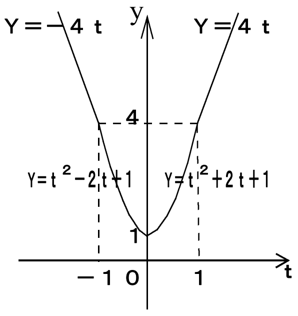


(ⅰ) $t\leqq -1$ のとき、
$Y=M-m=(t^2-2t+2)-(t^2+2t+2)=-4t$

(ⅱ) $-1<t\leqq 0$ のとき、
$Y=M-m=(t^2-2t+2)-1=t^2-2t+1$

(ⅲ) $0<t\leqq 1$ のとき、
$Y=M-m=(t^2+2t+2)-1=t^2+2t+1$

(ⅳ) $1<t$ のとき、
$Y=M-m=(t^2+2t+2)-(t^2-2t+2)=4t$



右上のグラフより、$Y=M-m$ の最小値は $t=0$ のとき、1

【演　習】

$\boxed{演１}$ 定義域が $p-1\leqq x\leqq p+1$ の関数 $f(x)=x^2-4x+p+1$ について

(1) (ⅰ) $f(x)$の最小値を $m(p)$とおくと、
$p\leqq\boxed{ア}$ のとき、$m(p)=p^2-p-\boxed{イ}$，$\boxed{ア}<p\leqq\boxed{ウ}$ のとき、$m(p)=p-\boxed{エ}$
$\boxed{ウ}<p$ のとき、$m(p)=p^2-\boxed{オ}p+\boxed{カ}$

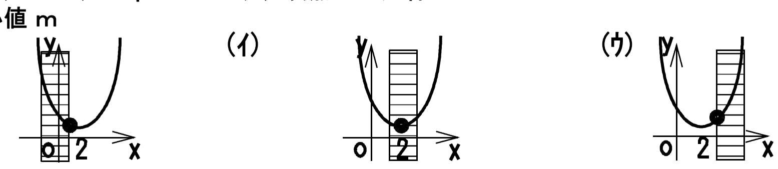
(ⅱ) $p-1\leqq x\leqq p+1$ の範囲で、つねに $x^2-4x+p+1\geqq 0$ が成り立つとき p の値の範囲は $p\leqq\boxed{キク}$，$\boxed{ケ}\leqq p$ である。

(2) $f(x)$の最大値を$M(p)$とおくと、$p\leqq\boxed{コ}$ のとき、$M(p)=p^2-\boxed{サ}p+\boxed{シ}$
$\boxed{コ}<p$ のとき、$M(p)=p^2-p-\boxed{ス}$

(3) (1)の $m(p)$，(2)の $M(p)$について、$M(p)-m(p)$の値がもっとも小さくなるのは、$p=\boxed{セ}$ のときで、その値は $\boxed{ソ}$ である。

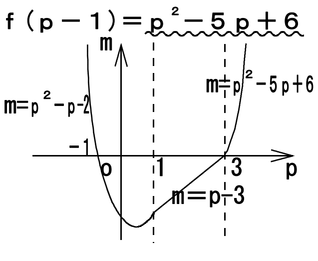
$f(x)=(x-2)^2+p-3$ より、頂点の x 座標は $x=2$

(1) (ⅰ) 最小値 m



(ｱ) $p+1\leqq 2$ のとき（$p\leqq 1$）　$f(p+1)=p^2-p-2$
(ｲ) $p-1\leqq 2<p+1$ のとき（$1<p\leqq 3$）　$f(2)=p-3$
(ｳ) $2<p-1$ のとき（$3<p$）　$f(p-1)=p^2-5p+6$

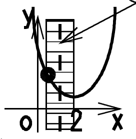
(ⅱ)
$$m(p)=\begin{cases}p\leqq 1 & のとき\quad p^2-p-2\\ 1<p\leqq 3 & のとき\quad p-3\\ 3<p & のとき\quad p^2-5p+6\end{cases}$$



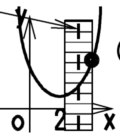
$m(p)\geqq 0$ となる p の値の範囲は、
右グラフより、$p\leqq -1$，$3\leqq p$

(2) 最大値 M

x=p-1 と x=p+1 の真中 x=p

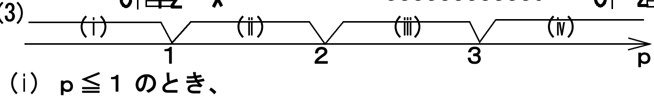


(ｴ) $p\leqq 2$ のとき　$f(p-1)=p^2-5p+6$



(ｵ) $2<p$ のとき　$f(p+1)=p^2-p-2$

(3)

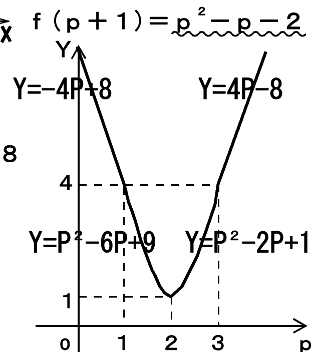


(ⅰ) $p\leqq 1$ のとき、
$Y=M-m=(p^2-5p+6)-(p^2-p-2)=-4p+8$

(ⅱ) $1<p\leqq 2$ のとき、
$Y=M-m=(p^2-5p+6)-(p-3)=p^2-6p+9$

(ⅲ) $2<p\leqq 3$ のとき、
$Y=M-m=(p^2-p-2)-(p-3)=p^2-2p+1$

(ⅳ) $3<p$ のとき、
$Y=M-m=(p^2-p-2)-(p^2-5p+6)=4p-8$



右上のグラフより、$Y=M-m$ の最小値は $p=2$ のとき、1